詳細解答

STEP III 1988，第 1 題

純數學 • 曲線描繪與界限

STEP III 1988，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/88-s3-q1

關鍵思路

繪畫草圖時，因子 $x^2\mathrm{e}^{-x}$ 永不為負，所以 y 的正負完全由 $1+x$ 決定。有了這一點，再加上一次求導，以及曲線在兩端和 $x=-1$ 附近的表現，整條曲線的形狀便清楚了。至於積分，最乾淨利落的做法是把 x^2 除以 $1+x$：這樣被積函數（integrand）的大部分積分後恰好互相抵消，餘下的部分則很容易夾在兩個簡單的界之間。

解答

圖像

設 $f(x)=\dfrac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{1+x}$，定義於所有 $x\neq -1$。

正負與零點。由於 $x^2\geq 0$ 而 $\mathrm{e}^{-x}>0$，當 $x<-1$ 時 $f(x)<0$，當 $x>-1$ 時 $f(x)\geq 0$，而且只有在 $x=0$ 時才有 $f(x)=0$。因子 x^2 表示曲線在原點只是與 x 軸相切，而不是穿過它。

漸近線（asymptote）與兩端的表現。

- 當 $x\to -1$ 時，分子趨向 $\mathrm{e}>0$，分母趨向 0，所以 $x=-1$ 是一條鉛垂漸近線；當 $x\to -1^-$ 時 $f\to -\infty$，當 $x\to -1^+$ 時 $f\to +\infty$。
- 當 $x\to +\infty$ 時，$f(x)\approx x\mathrm{e}^{-x}\to 0^+$，因為指數函數的增長勝過冪函數。所以 $y=0$ 是右方的漸近線，曲線從上方趨近它。
- 當 $x\to -\infty$ 時，$\dfrac{x^2}{1+x}\approx x\to -\infty$ 而 $\mathrm{e}^{-x}\to +\infty$，所以 $f(x)\to -\infty$，而且下降得非常快。

駐點（stationary point）。根據商法則（quotient rule），

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-x^2)\mathrm{e}^{-x}(1+x)-x^2\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{-x}\left(2x+x^2-x^3-x^2\right)}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x\left(2-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^2}. \end{aligned}$$

所以在 $x=0$ 和 $x=\pm\sqrt{2}$ 時 $f'(x)=0$。因子 e^{-x} 和 $(1+x)^2$ 都是正數，所以 f' 的正負與 $x(2-x^2)$ 的正負相同：

區間	$x<-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}<x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<\sqrt{2}$	$x>\sqrt{2}$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

由此得出：

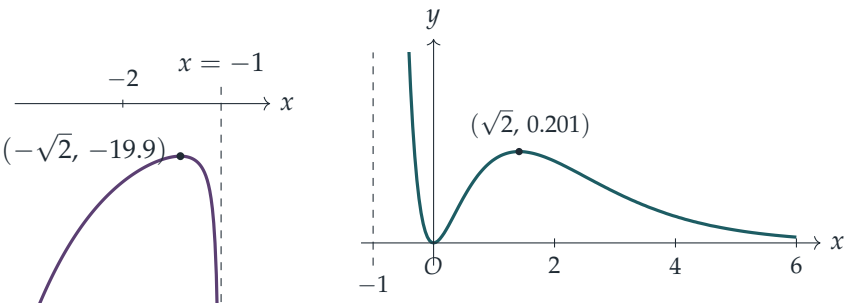
- 在 $x=\sqrt{2}$ 處有一個局部極大點（local maximum），該處 $y=\dfrac{2\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}=2(\sqrt{2}-1)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\approx 0.201$；
- 在原點有一個局部極小點（local minimum）；
- 在左邊分支上的 $x=-\sqrt{2}$ 處有一個局部極大點，該處 $y=\dfrac{2\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}}=-2(\sqrt{2}+1)\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\approx -19.9$。

想一想 一條完全位於橫軸下方的分支，怎可能有極大點？

在 $x<-1$ 的範圍內，曲線隨着 $x\to-\infty$ 從 $-\infty$ 升上來，到了漸近線 $x=-1$ 又再跌回 $-\infty$，所以它必定在中間某處轉向。最高點位於 $x=-\sqrt{2}$，而這一點仍然遠在橫軸之下。這條分支是一個懸在橫軸下方的「小丘」，丘頂的高度約為 -19.9。

在右邊，曲線從緊貼 $x=-1$ 右側的 $+\infty$ 下降，到原點時降至 0，然後上升至 $x=\sqrt{2}$ 處那個小小的極大點，其後衰減至 0。曲線在原點附近向上凹，在極大點處向下凹，所以在 $x=\sqrt{2}$ 的兩側各有一個拐點（point of inflection）（數值上約在 $x\approx 0.35$ 和 $x\approx 2.5$ 附近）。繪畫草圖時，我們不需要知道它們的準確位置。

兩條分支在縱向上的尺度相差極大，所以我們把它們分開繪畫。在左邊，y 一直下降至約 -70。在右邊，我們把 y 軸的比例放大，讓 0.2 這個極大值清楚可見。



積分

設 $I=\int_0^\infty \frac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$。把 x^2 除以 $1+x$，得

$$\frac{x^2}{1+x}=x-1+\frac{1}{1+x}.$$

現在 $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1$（取 $u=x$ 作分部積分（integration by parts)），而 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1$，所以首兩項的貢獻是 $1-1=0$，於是

$$I=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

（三個積分全部收斂（converge），所以把積分拆開是合理的。）當 $x>0$ 時，我們有 $0<\frac{1}{1+x}<1$，所以

$$0<\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}<\mathrm{e}^{-x}\qquad(x>0).$$

這些不等式在整個區間上都是嚴格的，而且各函數均為連續，所以積分後不等式仍然嚴格成立：

$$0<I<\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1.$$

所以 I 介乎 0 與 1 之間，正是題目所求。

另一種做法。我們可以略去除法這一步。當 $x>0$ 時，$\frac{x^2}{1+x}<\frac{x^2}{x}=x$，所以 $0<f(x)<x\mathrm{e}^{-x}$，從而 $0<I<\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1$。不過那個除法仍然值得認識，因為它清楚顯示了 I 究竟從何而來。

驗算

- 在一千個隨機選取的點上以數值方法對 f 求導，結果與 $f'(x)=x(2-x^2)\mathrm{e}^{-x}/(1+x)^2$ 吻合。

- 在 $[0, 60]$ 上使用辛普森法則（Simpson's rule）得出 $I \approx 0.59635$，而 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ 亦給出相同的數值，穩穩地落在 0 與 1 之間。
- 從草圖作粗略估算：在 $x > 0$ 的範圍內，曲線是一個高度約為 0.2 的小丘，到了 $x = 6$ 已大致消退。以此為高和底的三角形，面積約為 0.6，與 0.596 相符。

常見錯誤

- 遺漏了 $x = -\sqrt{2}$ 處的駐點，因為它位於「另一條」分支上；又或者因為該處 y 是負數，便把它說成極小點。
- 說曲線在原點穿過橫軸。二重因子 x^2 令曲線只是與橫軸相切。
- 單憑 $\mathrm{e}^{-x} \leq 1$ 便聲稱 $I < 1$。這個界只會得出 $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$，而這個積分是發散（diverge）的。

STEP 之外

I 的值是 $\mathrm{e}\,E_1(1) \approx 0.5963$，其中 $E_1(t) = \int_t^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{-1}\,\mathrm{d}u$ 是指數積分（exponential integral）。這個數稱為 Gompertz 常數（Gompertz constant）。它不能用初等函數（elementary functions）表示，這正是題目只要求找出上下界的原因。對於無法求出確切值的積分，拿它與能夠求值的積分作比較，從而作出估計，是分析學（analysis）的一項核心技巧（即瑕積分（improper integral）的「比較判別法」（comparison test））。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析學入門教科書）對此有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。