詳細解答

STEP II 1988，第 9 題

純數學 • 子群與併集

> **STEP II 1988，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q9

本題在 *Beyond STEP* 第 6.6 節子羣的併集中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/subgroup-unions.html

關鍵思路

用反證法（proof by contradiction）。假如兩個子羣（subgroup）都不是整個羣，就取一個只屬於 G_2 的元素，再取一個只屬於 G_1 的元素，然後問：它們的乘積落在哪裏？無論把乘積放進哪一個子羣，乘法的封閉性（closure）和逆元（inverse）都會導出矛盾。換成三個子羣，乘積就多了一個去處。最自然的嘗試，是找一個每個元素都是自身逆元的羣。

解答

兩個子羣

假設 G 的每個元素都屬於 G_1 或 G_2，並為了導出矛盾，假設 $G_1 \neq G$ 且 $G_2 \neq G$。

由於 $G_1 \neq G$ 而 $G_1 \subseteq G$，存在元素 $a \in G$ 使得 $a \notin G_1$。每個元素都屬於 G_1 或 G_2，所以 $a \in G_2$。

同理，由於 $G_2 \neq G$，存在元素 $b \in G$ 使得 $b \notin G_2$，於是 $b \in G_1$。

因此我們有

$$a \in G_2, \quad a \notin G_1, \qquad\qquad b \in G_1, \quad b \notin G_2.$$

現在考慮乘積 $ab \in G$。按假設，它屬於 G_1 或 G_2。

- 若 $ab \in G_1$：由於 $b \in G_1$ 而 G_1 是子羣，故 $b^{-1} \in G_1$，於是由封閉性得

$$a = (ab)\,b^{-1} \in G_1,$$

  這與 $a \notin G_1$ 矛盾。

- 若 $ab \in G_2$：由於 $a \in G_2$，故 $a^{-1} \in G_2$，於是

$$b = a^{-1}(ab) \in G_2,$$

  這與 $b \notin G_2$ 矛盾。

兩種情況都不可能發生，所以我們的假設不成立：$G_1 = G$ 或 $G_2 = G$。 ■

想一想 我們在哪裏用到了 G 是有限羣這個條件？

完全沒有用到。這個論證只用到子羣的性質（封閉性和逆元），對任何羣都成立，不論有限還是無限。換句話說：一個羣永遠不會是兩個真子羣（proper subgroup）的併集（union）。

三個子羣

取 H 為克萊因四元羣（Klein four-group）

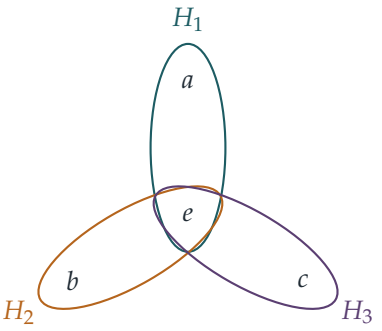
$$H = \{e,\ a,\ b,\ c\}, \qquad a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad ab = ba = c,\ bc = cb = a,\ ca = ac = b.$$

具體來說，H 就是 $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ 在每個坐標各自模 2 相加之下所成的羣，也可以看成非正方形的長方形的對稱羣（symmetry group）（恆等變換、兩個反射和半周旋轉）。

每個非單位元的元素的階（order）都是 2，所以

$$H_1 = \{e,a\}, \qquad H_2 = \{e,b\}, \qquad H_3 = \{e,c\}$$

每一個都是子羣：它包含 e，在乘法下封閉（唯一非平凡的乘積是 $a \cdot a = e$，b 和 c 的情況相同），而且每個元素都是自身的逆元。它們各有 2 個元素，所以沒有一個等於 H。但它們合起來包含了 e、a、b 和 c，也就是 H 的全部元素。



所以三個真子羣是可以覆蓋一個羣的。另一個例子是四元數羣（quaternion group）$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$，它是三個循環子羣（cyclic subgroup）$\{\pm 1, \pm i\}$、$\{\pm 1, \pm j\}$ 和 $\{\pm 1, \pm k\}$ 的併集，每個子羣的階都是 4。

留意第一部分的論證為何在這裏失效：當 $a \notin H_2$ 而 $b \notin H_1$ 時，乘積 $ab = c$ 可以溜進第三個子羣 H_3。

驗算

- 以窮舉法搜尋下列各羣的所有子羣：階為 1 至 12 的循環羣、S_3、S_4、階為 8 的二面體羣（dihedral group）、Q_8、$\mathbb{Z}_2^2$ 和 $\mathbb{Z}_2^3$（共 1278 個由真子羣組成的有序對），結果找不到任何一對的併集等於整個羣。
- 同一次搜尋亦確認 $\{e, a\} \cup \{e, b\} \cup \{e, ab\}$ 就是整個克萊因四元羣，而 Q_8 是 $\langle i \rangle$、$\langle j \rangle$、$\langle k \rangle$ 的併集。有趣的是，所測試的循環羣，以及 S_3 和 S_4，沒有一個是三個真子羣的併集。
- 對第一部分作一個簡單的合理性檢查：在循環羣中，生成元（generator）不屬於任何真子羣，所以循環羣無論用多少個真子羣都無法覆蓋。

常見錯誤

- 用計數來論證：兩個真子羣各自最多有 $\frac{1}{2}|G|$ 個元素，但它們都含有 e，所以併集最多有 $|G| - 1$ 個元素。這個計數證明是正確的（根據拉格朗日定理（Lagrange's theorem）），而且簡短，但它確實需要有限性和拉格朗日定理；兩者都必須寫明。
- 取了 $a \notin G_1$ 和 $b \notin G_2$，卻忘記使用 $a \in G_2$ 和 $b \in G_1$。缺少這兩個事實，就推不出矛盾。
- 給出的三個子羣並非全是真子羣，或者根本不是子羣（例如 $\{e, a, b\}$，由於 $ab = c$，它並不封閉）。

STEP 之外

哪些羣是三個真子羣的併集？Scorza 的一個定理（1926 年）給出了答案：恰好是那些有商羣（quotient）同構（isomorphic）於克萊因四元羣的羣，這也正是克萊因羣成為基本例子的原因。同樣的「不能是兩個的併集」這一事實也出現在線性代數（linear algebra）中：無限域（infinite field）上的向量空間（vector space）永遠不會是有限個真子空間（proper subspace）的併集。若想找一本羣論的入門書，可以試試 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。