詳細解答

STEP II 1988，第 8 題

純數學 • 矩陣與特徵向量

> **STEP II 1988，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q8

關鍵思路

模型中的一年是一個線性映射（linear map），因此相當於乘以一個 2×2 矩陣（matrix）M。比例永遠不變的種羣，就是 M 只會把它按比例放大或縮小的種羣，也就是一個*特徵向量*（*eigenvector*）。一旦求得兩個特徵向量，任何初始種羣都可以分拆成沿這兩個方向的兩部分，而每一部分每年只是乘以它自己的特徵值（eigenvalue）。於是，長遠的命運就取決於哪個特徵值較大，以及它前面的係數的正負。

解答

保持不變的比例

把種羣數量寫成列向量（column vector），模型中的一年就是

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

比例 $A : B$ 保持不變，當且僅當存在某個數 λ 使得 $(A', B') = \lambda(A, B)$，即 (A, B) 是 M 的特徵向量。特徵值滿足

$$\det(M - \lambda I) = \left(\tfrac{1}{4} - \lambda\right)\left(\tfrac{3}{2} - \lambda\right) + \tfrac{3}{8} = \lambda^2 - \tfrac{7}{4}\lambda + \tfrac{3}{4} = 0,$$

所以 $4\lambda^2 - 7\lambda + 3 = (\lambda - 1)(4\lambda - 3) = 0$，得出 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = \frac{3}{4}$。

- $\lambda = 1$：由第一行得 $\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B = A$，所以 $A = B$。比例為 1，而這樣的種羣每年都完全不變。
- $\lambda = \frac{3}{4}$：由第一行得 $\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B = \frac{3}{4}A$，所以 $A = \frac{3}{2}B$。比例為 $\frac{3}{2}$；以第二行驗算：$\frac{3}{2}B - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}B = \frac{3}{4}B$。兩個物種每年都縮減至原來的 $\frac{3}{4}$。

不用矩陣也可以得到同樣的結果：若 $A = rB$，則新的比例為 $\dfrac{\frac{1}{4}r + \frac{3}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}r}$，令它等於 r 便得 $2r^2 - 5r + 3 = 0$，所以 $r = 1$ 或 $r = \frac{3}{2}$。無論用哪種方法，比例只有在等於 1 或 $\frac{3}{2}$ 時才能保持不變，正如題目所要求。我們取 $x = 1$ 和 $y = \frac{3}{2}$。

其後各年

設

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

比較各分量，得 $p + \frac{3}{2}q = a$ 和 $p + q = b$。兩式相減，$\frac{1}{2}q = a - b$，所以

$$q = 2(a - b), \qquad p = b - q = 3b - 2a.$$

由於 M 是線性的，一年之後第一部分乘以 1，第二部分乘以 $\frac{3}{4}$；n 年之後（只要模型仍然適用），我們有

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = (3b - 2a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2(a - b)\left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

即

$$a_n = (3b - 2a) + 3(a - b)\left(\tfrac{3}{4}\right)^n,$$
$$b_n = (3b - 2a) + 2(a - b)\left(\tfrac{3}{4}\right)^n.$$

由於 $(\frac{3}{4})^n \to 0$，種羣數量趨向 $(3b - 2a,\ 3b - 2a)$，這是平衡點（equilibrium）所組成的直線 $a = b$ 上的一點。

分類之前，先確認一件可以放心的事：土豚永遠不會出問題。若 $a_n \geq 0$ 且 $b_n > 0$，則 $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n > 0$，所以只要水牛仍然存活，土豚的數量也保持為正數。因此唯一需要留意的是 b_n 的正負，而我們只需考慮平面上 $a \geq 0$、$b > 0$ 的區域。

> **想一想** b_n 會不會有一段時間跌至零以下，然後回升並趨向一個正的極限（limit）？

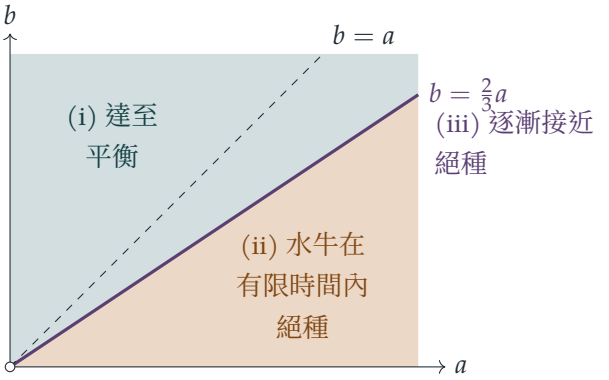
不會。在 b_n 的公式中，只有 $(\frac{3}{4})^n$ 與 n 有關，而它由 1 穩步遞減至 0。所以 b_n 由 $b_0 = b$ 單調（monotonic）地移向它的極限 $3b - 2a$，而每個 b_n 都介乎 b 與 $3b - 2a$ 之間。這樣分類就乾淨利落了。

三個區域

(i) 若 $3b - 2a > 0$，即 $b > \frac{2}{3}a$，則 b 和 $3b - 2a$ 都是正數，所以每個 b_n 都是正數，模型永遠適用。種羣趨向平衡點 $(3b - 2a,\ 3b - 2a)$，而這個平衡點並非零。這是直線 $b = \frac{2}{3}a$ 上方的區域（包括 b 軸，即 $a = 0$）。

(ii) 若 $3b-2a<0$，即 $b<\frac{2}{3}a$，則 $a>\frac{3}{2}b>b$，所以 $a-b>0$，而 b_n 嚴格遞減並趨向負數 $3b-2a$。因此對某個有限的 n 有 $b_n\le 0$：水牛在有限時間內絕種。這是直線 $b=\frac{2}{3}a$ 與 a 軸之間的區域。

(iii) 若 $3b-2a=0$，即 $b=\frac{2}{3}a$ 且 $a>0$，則 $p=0$，種羣純粹是 $(\frac{3}{2},1)$ 的倍數：$b_n=b(\frac{3}{4})^n$，它對每個 n 都是正數，但趨向 0。水牛（以及土豚）逐漸接近絕種，卻永遠不會真正絕種。這只是半直線（half-line）$b=\frac{2}{3}a$，$a>0$。



虛線 $b=a$ 由已經處於平衡狀態的種羣組成；區域 (i) 內的每個起點都會向它移動，並且沿着與直線 $b=\frac{2}{3}a$ 平行的方向滑動（$(\frac{3}{2},1)$ 方向的分量不斷縮小，而 $(1,1)$ 分量則保持不變）。

驗算

- 取 $n=0$，公式給出 $a_0=3b-2a+3a-3b=a$ 和 $b_0=3b-2a+2a-2b=b$，正如所應得的結果。
- 由 $(a,b)=(1,3)$ 出發，它位於區域 (i)。按模型計算一年，得 $(\frac{1}{4}+\frac{9}{4},\ \frac{9}{2}-\frac{1}{2})=(\frac{5}{2},4)$，而公式給出 $7-6(\frac{3}{4})=\frac{5}{2}$ 和 $7-4(\frac{3}{4})=4$。極限為 $(7,7)$。
- 我們用電腦以分數作精確運算，由 3000 個隨機起點迭代這個模型，確認了閉合形式（closed form）在 40 年內都成立，也確認了 $3b-2a$ 的正負在每一個情況下都能正確預測結果，包括 $b=\frac{2}{3}a$ 上的點，例如 $(3,2)$ 在五年後變成 $(\frac{729}{1024},\frac{243}{512})$，即起點的 $(\frac{3}{4})^5$ 倍。

常見錯誤

- 把比例上下顛倒：題目問的是土豚對水牛的比例，所以答案是 1 和 $\frac{3}{2}$，而不是 1 和 $\frac{2}{3}$。

- 忘記模型在 $b_n \leq 0$ 時便告終止，於是聲稱每個種羣都趨向 $(3b-2a, 3b-2a)$，連「極限」為負數的情況也包括在內。
- 把區域 (iii) 說成一塊面積：它只是半直線 $b = \frac{2}{3}a$，即 (i) 與 (ii) 之間的邊界。

STEP 之外

這是一個離散線性動力系統（discrete linear dynamical system），而這裏的方法（先對角化（diagonalise），再把每個特徵值取 n 次方）正是大學一年級線性代數計算 M^n 的做法。特徵值 1 給出一條由不動點（fixed point）組成的直線，而特徵值 $\frac{3}{4} < 1$ 則給出一個不斷衰減的方向；把時間改為連續，並以 $e^{\lambda t}$ 取代 λ^n，同樣的圖像就支配着線性微分方程組（systems of linear differential equations）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 有一章很好地講解差分方程（difference equation）和矩陣的冪，而 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations* 則處理連續的版本。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。