詳細解答

STEP II 1988，第 7 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP II 1988，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q7

關鍵思路

這裏每一個等式都來自一次代換（substitution），難處在於找出合適的代換。第一步需要一個把 $[1,2]$ 送到 $[0,1]$、並把 $2-2x+x^2$ 變成含有 $1+t^2$ 的式子的代換：莫比烏斯映射（Möbius map）$x=2/(1+t)$ 恰好做到這一點。一旦出現 $1+t^2$，取 $t=\tan\theta$ 便是順理成章的一步。以 θ 表示的被積函數（integrand）關於 $\theta=\frac{1}{8}\pi$ 對稱，而在半個區間上把 $t=\tan\theta$ 還原，便會帶出 $\tan\frac{1}{8}\pi=\sqrt{2}-1$。最後的推論是把同樣的代換反過來使用。

解答

全篇之中，k 是任意實常數。所有要取冪的底數在所涉及的範圍內都是正數，所以非整數次冪不會造成任何問題。

從 $[1,2]$ 到 $[0,1]$

設 $x=\dfrac{2}{1+t}$，於是當 $x=1$ 時 $t=1$，當 $x=2$ 時 $t=0$，並且 $\mathrm{d}x=-\dfrac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$。那麼

$$2-2x+x^2=\frac{2(1+t)^2-4(1+t)+4}{(1+t)^2}=\frac{2(1+t^2)}{(1+t)^2},\qquad x^{k+1}=\frac{2^{k+1}}{(1+t)^{k+1}}.$$

所以被積函數變成

$$\frac{2^k(1+t^2)^k}{(1+t)^{2k}}\cdot\frac{(1+t)^{k+1}}{2^{k+1}}\cdot\frac{2}{(1+t)^2}=\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}},$$

而 $\mathrm{d}x$ 中的負號把積分上下限由 $\int_1^0$ 對調為 $\int_0^1$：

$$I = \int_0^1 \frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t.$$

三角形式

現在設 $t = \tan\theta$，其中 θ 由 0 變到 $\frac{1}{4}\pi$。那麼 $1+t^2 = \sec^2\theta$，$\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，並且

$$1 + t = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \theta\right)}{\cos\theta},$$

這裏用到 $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{4}\pi\cos\theta + \sin\frac{1}{4}\pi\sin\theta\right)$。被積函數變成

$$\begin{aligned}\sec^{2k}\theta \cdot \frac{\cos^{k+1}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \theta\right)\right]^{k+1}} \cdot \sec^2\theta &= \frac{\cos^{-(k+1)}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \theta\right)\right]^{k+1}} \\ &= \frac{1}{\left[\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \theta\right)\right]^{k+1}},\end{aligned}$$

因為 $\cos\theta$ 的冪次合計為 $-2k + (k+1) - 2 = -(k+1)$。兩個餘弦在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上都是正數，所以這對任何實數 k 都成立。這就得出 I 的第二個形式。

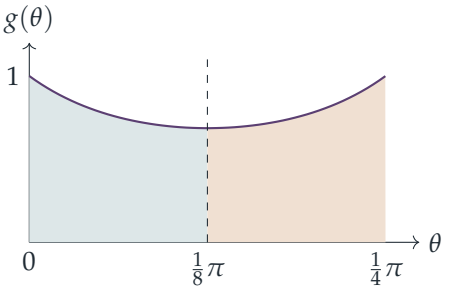
想一想 為甚麼在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上的積分應該是在 $[0, \frac{1}{8}\pi]$ 上的積分的兩倍？

把以 θ 表示的被積函數記作 $g(\theta)$。把 θ 換成 $\frac{1}{4}\pi - \theta$，只不過是把 $\cos\theta$ 和 $\cos(\frac{1}{4}\pi - \theta)$ 這兩個因子對調，所以 $g(\frac{1}{4}\pi - \theta) = g(\theta)$：$g$ 的圖像關於 $\theta = \frac{1}{8}\pi$ 對稱。（你也可以直接看出這一點：$\sqrt{2}\cos\theta\cos(\frac{1}{4}\pi - \theta) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}\cos(2\theta - \frac{1}{4}\pi))$，它只取決於 θ 與 $\frac{1}{8}\pi$ 的距離。）嚴格來說，代入 $\phi = \frac{1}{4}\pi - \theta$，

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/8} g(\tfrac{1}{4}\pi - \phi)\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\pi/8} g(\phi)\,\mathrm{d}\phi,$$

所以 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 的兩半貢獻相等，而

$$I = 2\int_0^{\pi/8} \frac{\mathrm{d}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \theta\right)\right]^{k+1}}.$$



圖中所示是 $k=1$ 時的 g：兩個着色的半邊互為鏡像。

由此得出積到 $\sqrt{2}-1$ 的積分

現在在 $[0,\frac{1}{8}\pi]$ 上把代換 $t=\tan\theta$ 反過來做。上面計算的每一步都保持不變；只有上限移到了 $t=\tan\frac{1}{8}\pi$。由 $\tan\frac{1}{4}\pi=\dfrac{2\tau}{1-\tau^2}=1$，其中 $\tau=\tan\frac{1}{8}\pi$，可得 $\tau^2+2\tau-1=0$，所以 $\tau=-1\pm\sqrt{2}$，而正根就是 $\tan\frac{1}{8}\pi=\sqrt{2}-1$。因此

$$I=2\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t,$$

這正是所求。把這個結果與同一被積函數的 $I=\int_0^1$ 比較，我們發現在 $[0,\sqrt{2}-1]$ 上的積分和在 $[\sqrt{2}-1,1]$ 上的積分*兩者都*等於 $\frac{1}{2}I$。這就是我們接下來要用的事實。

推論

左方。寫成 $\dfrac{2-2x^2+x^4}{x^2}=\dfrac{2-2u+u^2}{u}$，其中 $u=x^2$。那麼 $\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{2u}$，而 u 由 1 變到 2：

$$\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{2-2x^2+x^4}{x^2}\right)^k\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(2-2u+u^2)^k}{u^k}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}I.$$

右方。被積函數是 $\dfrac{(2-2x+x^2)^k}{x^{k+1}}$，與 I 的定義中的相同，但積分區間是 $[1,\sqrt{2}]$。再次使用第一個代換 $x=2/(1+t)$。這時 $x=\sqrt{2}$ 對應 $1+t=\sqrt{2}$，即 $t=\sqrt{2}-1$，所以

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{2-2x+x^2}{x}\right)^k\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_{\sqrt{2}-1}^1\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t\\&=I-\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t=I-\tfrac{1}{2}I=\tfrac{1}{2}I.\end{aligned}$$

兩方都等於 $\frac{1}{2}I$，所以兩者相等，這就是所要證明的結果。

驗算

- $k = 0$：$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2$，而最後那個恆等式的兩方都是 $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2$，正如所料。
- $k = 1$：$I = \int_1^2 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right)\mathrm{d}x = 2 - 2\ln 2 \approx 0.61371$。對 I 的全部五個形式，以及最後那個恆等式的兩方，使用辛普森法則（Simpson's rule）計算，結果吻合至小數點後十位（每一方都是 ≈ 0.30685）。對於非整數和負數的 k，例如 $k = 0.5$、$k = -0.7$ 和 $k = 4.3$，結果同樣吻合。

常見錯誤

- 把 $\cos\theta + \sin\theta$ 寫成單一個餘弦時漏掉因子 $\sqrt{2}$，結果多出一個 $2^{(k+1)/2}$。
- 試圖求出 I 的值。對一般的 k，它並沒有閉合形式（closed form），也不需要有：每一步都只是變數代換或對稱性。
- 在推論中，沒有留意到右方只是 I 的一部分，需要用上「由此得出」的那個結果才能完成。

STEP 之外

映射 $x \mapsto 2/(1+t)$ 是一個莫比烏斯變換（Möbius transformation），又稱分式線性變換（fractional linear transformation）。這類映射把圓和直線送到圓和直線，對於由二次式構成的被積函數，它們是最自然的變數代換。找出被積函數隱藏的對稱性，就像這裏的 $\theta \mapsto \frac{1}{4}\pi - \theta$，是計算沒有初等原函數（antiderivative）的定積分（definite integral）時的常用技巧。想進一步了解莫比烏斯變換，可閱讀 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像方式講解複分析）。想看更多這種風格的積分，可參考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。