詳細解答

STEP II 1988，第 6 題

純數學 • 雙曲函數不等式

> **STEP II 1988，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q6

關鍵思路

三個函數在 $x = 0$ 時的值都是零，所以只需證明它們在 $x > 0$ 時遞增（increasing）便可。題目中各導數（derivative）是刻意安排的，使每一部分都為下一部分鋪路：(ii) 的導數包含 (i) 的函數，而 (iii) 的導數則是 (ii) 經重新縮放後的版本。至於 f，對數微分法（logarithmic differentiation）把 f′ 的正負號化為 (iii) 中函數的正負號，這顯然正是設置該部分的用意。

解答

以下我們一直使用這個原理：若 $F(0) = 0$ 且對所有 $x > 0$ 都有 $F'(x) > 0$，則對所有 $x > 0$ 都有 $F(x) > 0$。（根據中值定理（mean value theorem），存在某個 $\xi \in (0, x)$ 使得 $F(x) = F(x) - F(0) = xF'(\xi)$。）

第 (i) 部分

設 $g(x) = x - \tanh x$。則 $g(0) = 0$，且

$$g'(x) = 1 - \operatorname{sech}^2 x = \tanh^2 x,$$

這裏用了 $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$。當 $x > 0$ 時，我們有 $\tanh x > 0$，所以 $g'(x) > 0$。因此當 $x > 0$ 時，$x - \tanh x > 0$。

第 (ii) 部分

設 $h(x) = x\sinh x - 2\cosh x + 2$。則 $h(0) = 0 - 2 + 2 = 0$，且

$$h'(x) = \sinh x + x\cosh x - 2\sinh x = x\cosh x - \sinh x = \cosh x\,(x - \tanh x).$$

當 $x > 0$ 時，$\cosh x > 0$，而且由第 (i) 部分知 $x - \tanh x > 0$，所以 $h'(x) > 0$。因此當 $x > 0$ 時，$h(x) > 0$。

第 (iii) 部分

設 $k(x) = 2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x$。則 $k(0) = 0$，且

$$\begin{aligned} k'(x) &= 2\cosh 2x + 4x\sinh 2x - 6\cosh 2x + 4 \\ &= 4x\sinh 2x - 4\cosh 2x + 4. \end{aligned}$$

? **想一想** 這個組合我們在哪裏見過？

令 $u = 2x$，上式便是 $2u\sinh u - 4\cosh u + 4 = 2\,(u\sinh u - 2\cosh u + 2) = 2h(u)$。所以

$$k'(x) = 2h(2x) > 0 \quad \text{對於} x > 0,$$

這是由第 (ii) 部分得出的，因為 $2x > 0$。因此當 $x > 0$ 時，$k(x) > 0$。

f 沒有轉向點

當 $x > 0$ 時，$\mathrm{f}(x)$ 中每個因子都是正數，所以 $\mathrm{f}(x) > 0$，我們可以取對數：

$$\ln \mathrm{f}(x) = \ln x + \tfrac{1}{3}\ln\cosh x - \ln\sinh x.$$

求導，得

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{x} + \frac{\sinh x}{3\cosh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{3\sinh x\cosh x + x\sinh^2 x - 3x\cosh^2 x}{3x\sinh x\cosh x}.$$

現在把分子用倍角表示，利用 $\sinh x\cosh x = \frac{1}{2}\sinh 2x$、$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$ 和 $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$：

$$\begin{aligned} 3\sinh x\cosh x + x\sinh^2 x - 3x\cosh^2 x &= \tfrac{3}{2}\sinh 2x + \tfrac{x}{2}(\cosh 2x - 1) - \tfrac{3x}{2}(\cosh 2x + 1) \\ &= \tfrac{3}{2}\sinh 2x - x\cosh 2x - 2x \\ &= -\tfrac{1}{2}(2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x). \end{aligned}$$

於是

$$\mathrm{f}'(x) = -\frac{\mathrm{f}(x)\,(2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x)}{6x\sinh x\cosh x}.$$

當 $x > 0$ 時，由第 (iii) 部分知括號內的式子為正，而 $\mathrm{f}(x)$、x、$\sinh x$ 和 $\cosh x$ 全部為正。所以對每個 $x > 0$ 都有 $\mathrm{f}'(x) < 0$：f' 永不為零，故 f 沒有轉向點（turning point），事實上 f 在 $x > 0$ 上嚴格遞減。

草圖

我們需要知道曲線在兩端的表現。

當 $x \to 0^+$ 時：$x/\sinh x \to 1$ 且 $(\cosh x)^{1/3} \to 1$，所以 $\mathrm{f}(x) \to 1$。更仔細地說，$(\cosh x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$ 而 $x/\sinh x = 1 - \frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$，所以 x^2 項互相抵消；每個級數再多取一項，便得

$$\mathrm{f}(x) = 1 - \tfrac{1}{45}x^4 + O(x^6).$$

所以曲線離開（不包括在內的）點 $(0,1)$ 時非常平坦，斜率為零。

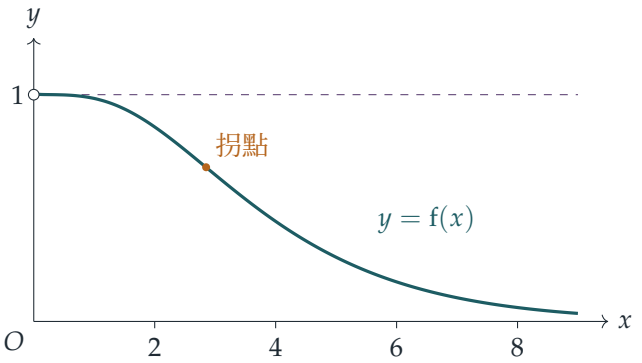
當 $x \to \infty$ 時：$\cosh x \sim \frac{1}{2}e^x$ 且 $\sinh x \sim \frac{1}{2}e^x$，所以

$$\mathrm{f}(x) \sim \frac{x\,(\frac{1}{2}e^x)^{1/3}}{\frac{1}{2}e^x} = 2^{2/3}\,x\,e^{-2x/3} \to 0,$$

因為指數函數的增長勝過 x 的冪。x-軸是一條漸近線（asymptote），而由於 $\mathrm{f} > 0$，曲線始終在它的上方。

想一想 曲線開始時平坦，結束時也平坦，卻一直遞減。這必然導致甚麼？

在 0 附近，曲線向下彎（它是 $1 - x^4/45$）；而當 x 很大時，它是一個衰減的指數函數，向上彎。所以兩者之間必定至少有一個拐點（point of inflection）；數值計算顯示恰有一個，在 $x \approx 2.85$ 附近，該處 $\mathrm{f} \approx 0.68$。一些函數值：$\mathrm{f}(1) \approx 0.983$，$\mathrm{f}(2) \approx 0.858$，$\mathrm{f}(4) \approx 0.441$，$\mathrm{f}(6) \approx 0.174$。



驗算

- 在 $x = 1$ 處：$1 - \tanh 1 \approx 0.238$、$\sinh 1 - 2\cosh 1 + 2 \approx 0.089$ 和 $2\cosh 2 - 3\sinh 2 + 4 \approx 0.643$，全部為正。
- 恆等式 $\mathrm{f}'/\mathrm{f} = -k(x)/(6x\sinh x\cosh x)$ 可在任何一點檢驗：在 $x = 1$ 處兩邊都約為 -0.0592，而 f 的數值導數亦與此吻合。
- 數值上，當 x 很小時 $(1 - \mathrm{f}(x))/x^4 \approx 0.0222 \approx \frac{1}{45}$，而當 x 很大時 $\mathrm{f}(x)/(2^{2/3}xe^{-2x/3}) \to 1$。

常見錯誤

- 只證明導數為正，卻忘記檢查函數在 $x = 0$ 時為 0；兩者缺一不可。
- 試圖直接用商法則和積法則對 f 求導。這樣做是可行的，但對數導數簡潔得多，而且能讓人看清它與 (iii) 的聯繫。
- 把曲線畫成穿過 x-軸，或從原點出發。曲線從高度 1 開始（但取不到這個值），並且一直保持為正。

STEP 之外

由 $F(0) = 0$ 和 $F' > 0$ 證明 $F(x) > 0$ 的技巧，正是中值定理的實際應用；而把它連環使用（如本題般依次經過 k'、h'、g'），是分析學中證明函數之間不等式的標準方法。展開式 $\mathrm{f}(x) = 1 - x^4/45 + \cdots$ 讓我們初嘗運算冪級數（power series）的滋味，大學一年級的分析課程會為此奠定嚴格的基礎。要閱讀這兩方面的內容，Abbott 的 *Understanding Analysis* 是個好選擇。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。