詳細解答

STEP II 1988，第 5 題

純數學 • 單位根與正切

> **STEP II 1988，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q5

關鍵思路

設 $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，並用二項式定理 (binomial theorem) 展開 z^7。其虛部 (imaginary part) 是 $\sin 7\theta$，把它除以 $\cos^7\theta$ 後，就變成 $t = \tan\theta$ 的多項式。七次單位根（roots of unity）令 $\sin 7\theta$ 等於零，於是我們毫不費力就得到一個 7 次多項式的七個根。之後，正切之積不過是各根之積，可以直接從常數項讀出。

解答

六次方程的根

由棣美弗定理(de Moivre's theorem)，$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + \mathrm{i}\sin 7\theta$。設 $c = \cos\theta$，$s = \sin\theta$。用二項式定理展開左方，並只保留含 $\mathrm{i}s$ 奇數次冪的項，得

$$\sin 7\theta = 7c^6 s - 35c^4 s^3 + 21c^2 s^5 - s^7.$$

只要 $\cos\theta \neq 0$，我們就可以除以 c^7，並設 $t = \tan\theta$：

$$\frac{\sin 7\theta}{\cos^7\theta} = 7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7 = -t\,(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7). \qquad (*)$$

$z^7 = 1$ 的根是 $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，其中 $\theta = \frac{2k\pi}{7}$，而對這些角有 $\sin 7\theta = \sin 2k\pi = 0$，即 $z^7 = 1$ 的虛部。改用 $\theta = \frac{k\pi}{7}$，$k = 0, 1, \ldots, 6$，會較為簡潔，這同樣給出 $\sin 7\theta = \sin k\pi = 0$（而且得到的正切值集合相同，因為 tan 的週期是 π）。

對上述每一個 θ：

- $\cos\theta \neq 0$，因為 $\frac{k\pi}{7} = \frac{\pi}{2}$ 需要 $2k = 7$；所以 $(*)$ 成立；

► $\sin 7\theta = 0$，所以由 $(*)$ 可知，$t = \tan\frac{k\pi}{7}$ 這個數是 $p(t) = t^7 - 21t^5 + 35t^3 - 7t$ 的根。

$\tan\frac{k\pi}{7}$（$k = 0, \ldots, 6$）這七個值互不相同：各角 $0, \frac{\pi}{7}, \ldots, \frac{6\pi}{7}$ 是 $[0, \pi)$ 中互不相同的點，沒有一個等於 $\frac{\pi}{2}$，而 tan 在 $[0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ 上是一對一（one-to-one）的（在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上為正且遞增，在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上為負，同樣遞增，兩段的取值範圍分別是 $[0, \infty)$ 和 $(-\infty, 0)$）。

? **想一想** 我們怎樣知道已經找到所有的根，而不只是其中一部分？

一個 7 次多項式最多有 7 個根。我們已找到 7 個互不相同的根，所以這就是全部的根。$k = 0$ 給出 $t = 0$，即來自因式 t 的那個根。因此 $t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0$ 的根恰好是

$$t = \tan\frac{k\pi}{7}, \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

也就是 $\pm\tan\frac{\pi}{7}$、$\pm\tan\frac{2\pi}{7}$、$\pm\tan\frac{3\pi}{7}$，因為 $\tan\frac{(7-k)\pi}{7} = -\tan\frac{k\pi}{7}$。

乘積 $\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7}$

對於偶數次的首一多項式（monic polynomial），各根之積等於常數項。所以

$$\left(\tan\tfrac{\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{\pi}{7}\right)\left(\tan\tfrac{2\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{2\pi}{7}\right)\left(\tan\tfrac{3\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{3\pi}{7}\right) = -7,$$

亦即

$$\left(\tan\tfrac{\pi}{7}\tan\tfrac{2\pi}{7}\tan\tfrac{3\pi}{7}\right)^2 = 7.$$

三個角都在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內，所以每個正切值都是正數，而乘積就是正平方根：$\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$。

現在利用 $\tan(\pi - x) = -\tan x$：$\tan\frac{4\pi}{7} = -\tan\frac{3\pi}{7}$ 及 $\tan\frac{6\pi}{7} = -\tan\frac{\pi}{7}$。兩個負號互相抵消，所以

$$\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7} = \tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}\tan\frac{\pi}{7} = \sqrt{7},$$

正如所求。

$n = 9$ 和 $n = 11$ 的情況

同樣的論證適用於任何奇數 $n = 2m + 1$。取 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ 的虛部，再除以 $\cos^n\theta$，得

$$\frac{\sin n\theta}{\cos^n\theta} = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{n}{2r+1}t^{2r+1} = t\,q_n(t),$$

其中 q_n 的次數是 $2m = n - 1$，首項係數（leading coefficient）是 $(-1)^m$，常數項是 $\binom{n}{1} = n$。具體寫出來，

$$q_9(t) = t^8 - 36t^6 + 126t^4 - 84t^2 + 9,$$
$$q_{11}(t) = -t^{10} + 55t^8 - 330t^6 + 462t^4 - 165t^2 + 11.$$

與之前完全一樣（n 是奇數，所以沒有任何 $\frac{k\pi}{n}$ 等於 $\frac{\pi}{2}$），q_n 的根就是 $n-1$ 個互不相同的數 $\tan\frac{k\pi}{n}$，$k=1,\dots,n-1$，它們可配對成 $\pm\tan\frac{k\pi}{n}$，其中 $k=1,\dots,m$。由於次數是偶數，q_n 各根之積是（常數項）/（首項係數）：

$$(-1)^m\prod_{k=1}^{m}\tan^2\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{(-1)^m}\quad\Longrightarrow\quad\prod_{k=1}^{m}\tan\frac{k\pi}{n}=\sqrt{n},$$

這裏取正根，因為這些角全都在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 內。當 $n=9$ 時，這就是 q_9 的常數項 9 除以首項係數 1；當 $n=11$ 時，則是 $11/(-1)=-11=(-1)^5\prod\tan^2$。無論哪種情況，$\tan\frac{k\pi}{n}$ 對 $k=1,\dots,m$ 的乘積，在 $n=9$ 時是 3，在 $n=11$ 時是 $\sqrt{11}$。

想一想 題目所求的乘積，其角是 $\frac{2\pi}{n},\frac{4\pi}{n},\dots$，而不是 $\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n},\dots$。我們怎樣由一個轉到另一個？正負號又會怎樣變化？

每個偶數倍 $2j\le m$ 本來就在 $1,\dots,m$ 這列數之中。每個偶數 $2j>m$（即 $2j>\frac{n}{2}$）給出 $\tan\frac{2j\pi}{n}=-\tan\frac{(n-2j)\pi}{n}$，而 $n-2j$ 是奇數，且不超過 m。由 1 到 m 的每個數都恰好這樣出現一次，因為偶數來自第一類，奇數來自第二類。所以所求的乘積是 $\pm\sqrt{n}$，而介乎 $\frac{n}{2}$ 與 n 之間的每個偶數各帶來一個負號。

- $n=9$：偶數有 $2,4,6,8$；其中大於 4.5 的是 $6,8$，共兩個負號。所以
$$\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}\tan\frac{6\pi}{9}\tan\frac{8\pi}{9}=\sqrt{9}=3.$$
- $n=11$：偶數有 $2,4,6,8,10$；其中大於 5.5 的是 $6,8,10$，共三個負號。所以
$$\tan\frac{2\pi}{11}\tan\frac{4\pi}{11}\tan\frac{6\pi}{11}\tan\frac{8\pi}{11}\tan\frac{10\pi}{11}=-\sqrt{11}.$$

（當 $n=7$ 時，大於 3.5 的偶數是 $4,6$，共兩個負號，所以該乘積是正數。）

驗算

- $n=9$ 有一個簡單的局部驗算：$\tan\frac{6\pi}{9}=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$，而數值上 $\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}\tan\frac{8\pi}{9}\approx 0.8391\times 5.6713\times(-0.3640)\approx -1.732=-\sqrt{3}$，所以總乘積是 3。
- 用計算機計算，$\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7}\approx 2.645751$，而 $\sqrt{7}\approx 2.645751$；$n=11$ 的乘積是 $\approx -3.316625=-\sqrt{11}$。
- 代入 $\tan\frac{\pi}{7}\approx 0.4816$，得 $t^6-21t^4+35t^2-7\approx 0$，與預期相符。

常見錯誤

- 除以 $\cos^7\theta$ 時沒有檢查它不等於零，或者沒有論證七個正切值互不相同。缺少這幾點，就未能證明已經找到所有的根。

- 把 $n = 11$ 的正負號弄錯：乘積的平方很容易求得，但正負號要靠數清楚有多少個負的正切值來決定。
- 忘記 $a_d t^d + \cdots + a_0$ 各根之積是 $(-1)^d a_0 / a_d$；這在 $n = 11$ 時尤其重要，因為其首項係數是 -1。

STEP 之外

$\tan \frac{k\pi}{n}$ 這些數都是代數數（algebraic number），而多項式 q_n（當 n 是質數時）就是它們在有理數上的最小多項式（minimal polynomial）。像 $\prod \tan \frac{k\pi}{n} = \sqrt{n}$ 這類恆等式，其實是高斯和（Gauss sums）的影子；高斯和說明 $\sqrt{\pm p}$ 位於由 p 次單位根生成的域（field）之中，這是代數數論（algebraic number theory）的一塊基石。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是進入這一系列想法的平易入門讀物，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis* 則讓人從幾何角度感受單位根。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。