詳細解答

STEP II 1988，第 4 題

純數學 • 阿根圖上的軌跡

> **STEP II 1988，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q4

關鍵思路

把複數寫成 $a+\mathrm{i}b$，再把「實數」或「虛數」這個條件化為一條關於 a 和 b 的實方程。這樣便會在阿根圖（Argand diagram）上得到一條熟悉的曲線。接着，把平方看成平面上的一個映射（map），將 x 和 y（或 p 和 q）用 a 和 b 表示，然後消去參數，便可找出該曲線被映射到哪裏。

關於題目的印刷文字，要說明一點：原文寫的是 w^2-2x，但 x 在該處尚未引入，而最後部分（出現 t^2-2t）顯示了題目原意的條件。我們把它理解為w^2-2w 是實數。

解答

第 (i) 部分

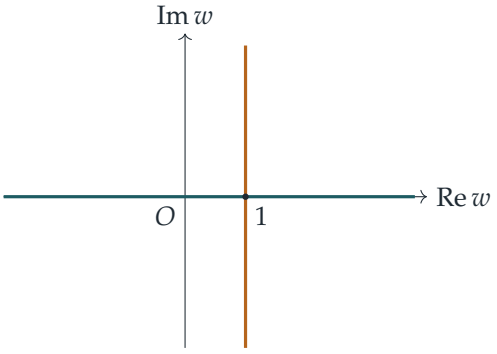
設 $w=a+\mathrm{i}b$，其中 a,b 為實數。則

$$w^2-2w=(a^2-b^2-2a)+\mathrm{i}\,(2ab-2b)=(a^2-b^2-2a)+2\mathrm{i}\,b(a-1).$$

這個數是實數，當且僅當其虛部（imaginary part）為零，即

$$b(a-1)=0, \qquad \text{即} \qquad b=0 \text{ 或 } a=1.$$

因此 w 的軌跡（locus）是實軸（real axis）連同垂直線 $\mathrm{Re}\,w=1$。兩條直線相交於 $w=1$。



第 (ii) 部分

我們把兩條直線分開來逐一平方。

實軸。若 $b = 0$，則 $w = a$ 是實數，而 $w^2 = a^2$。所以 $y = 0$ 及 $x = a^2 \geq 0$，而當 a 取遍所有實數時，a^2 會取遍 $[0, \infty)$ 內的每一個值。軌跡的這一部分是非負的 x 軸：即半直線（half-line）$y = 0$，$x \geq 0$。

直線 $a = 1$。若 $w = 1 + \mathrm{i}b$，則

$$w^2 = 1 - b^2 + 2\mathrm{i}b, \qquad \text{所以} \qquad x = 1 - b^2, \quad y = 2b.$$

利用 $b = \frac{1}{2}y$ 消去參數，得

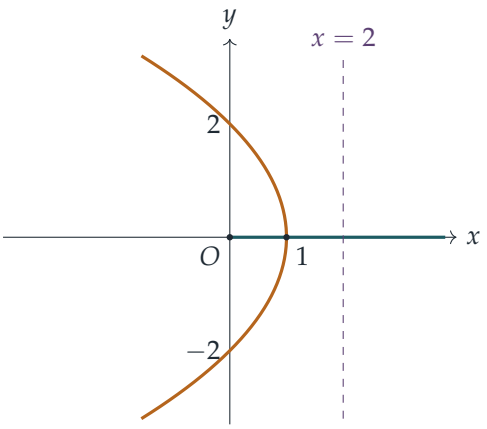
$$x = 1 - \tfrac{1}{4}y^2, \qquad \text{或} \qquad y^2 = 4(1 - x) = -4(x - 1).$$

只要取 $b = \frac{1}{2}y$，這條曲線上的每一點都能取到。它是一條拋物線（parabola），其軸沿 x 軸，頂點（vertex）在 $(1, 0)$，開口朝向 x 的負方向。與標準式 $Y^2 = 4cX$ 比較，這裏 $c = -1$，而 $X = x - 1$。所以焦點（focus）在 $X = -1$，即原點；準線（directrix）是 $X = 1$，即直線 $x = 2$。事實上 $x^2 + y^2 = x^2 + 4 - 4x = (2 - x)^2$，所以曲線上每一點與 O 的距離都等於它與直線 $x = 2$ 的距離。拋物線與 y 軸相交於 $(0, \pm 2)$。

想一想 為甚麼這條半直線不會延伸到 x 的負值？

w 平面上的實軸被覆蓋了兩次（分別由 a 和 $-a$），但實數的平方永遠不會是負數。所以整條實軸對摺到非負的那一半上。同樣地，直線 $\mathrm{Re}\, w = 1$ 只覆蓋拋物線一次，因為 $b \mapsto 2b$ 是一對一（one-to-one）的。

所以 (x, y) 的軌跡是拋物線 $y^2 = 4(1 - x)$（焦點在原點，準線為 $x = 2$），連同半直線 $y = 0$，$x \geq 0$。這條半直線由焦點出發，穿過頂點 $(1, 0)$；該頂點是 $w = 1$ 的像，亦即第 (i) 部分兩條直線的交點的像。



最後部分

設 $t = a + \mathrm{i}b$。這裏的「虛數」是指純虛數（purely imaginary），所以我們需要 $t^2 - 2t$ 的實部（real part）為零：

$$a^2 - b^2 - 2a = 0, \qquad \text{即} \qquad (a-1)^2 - b^2 = 1.$$

所以 t 位於一條以 1 為中心的等軸雙曲線（rectangular hyperbola）上，其頂點在 $t = 0$ 和 $t = 2$。在這條曲線上，$b^2 = a^2 - 2a = a(a-2) \geq 0$，所以 $a \leq 0$ 或 $a \geq 2$。

現在由 $t^2 = p + \mathrm{i}q$ 得

$$p = a^2 - b^2 = 2a, \qquad q = 2ab,$$

其中我們用了雙曲線的方程 $a^2 - b^2 = 2a$ 來化簡 p。所以 $a = \frac{1}{2}p$，於是

$$q^2 = 4a^2b^2 = 4a^2(a^2 - 2a) = p^2\left(\tfrac{1}{4}p^2 - p\right), \qquad \text{所以} \qquad 4q^2 = p^3(p-4).$$

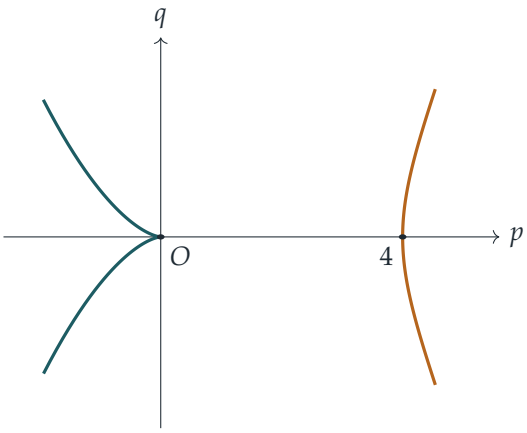
條件 $a \leq 0$ 或 $a \geq 2$ 變成 $p \leq 0$ 或 $p \geq 4$，這正好就是 $p^3(p-4) \geq 0$ 成立的範圍。反過來，在這條曲線上任取一點。若 $p \neq 0$，設 $a = \frac{1}{2}p$ 及 $b = q/p$。則 $b^2 = q^2/p^2 = \frac{1}{4}p(p-4) = a^2 - 2a$，所以 t 在雙曲線上，而且 $t^2 = (a^2 - b^2) + 2\mathrm{i}ab = p + \mathrm{i}q$。若 $p = 0$，則 $q = 0$，而這一點來自 $t = 0$。所以軌跡就是整條曲線

$$4q^2 = p^3(p-4).$$

它的形狀：

- 它對 p 軸對稱，因為方程中只出現 q^2。
- 在 $0 < p < 4$ 的範圍內沒有任何點。曲線分為兩段，分別來自雙曲線的兩支。
- 右邊一段由 $(4, 0)$ 開始，該點是 $t = 2$ 的像。在該點附近 $q^2 \approx 16(p-4)$，所以切線（tangent）是垂直的。

- 左邊一段通過原點，即 $t = 0$ 的像。在該點附近 $q^2 \approx -p^3$，所以 $|q| \approx |p|^{3/2}$，形成一個指向右方的尖點（cusp），兩臂都與 p 軸相切。
- 當 $|p|$ 很大時，$|q| \approx \frac{1}{2}p^2$，所以兩段都像拋物線般向外張開。



（圖中縱向比例經過壓縮。藍綠色的一段來自雙曲線上 $\operatorname{Re} t \le 0$ 的一支，琥珀色的一段來自 $\operatorname{Re} t \ge 2$ 的一支。）

驗算

- 第 (i) 部分：$w = 1 + 2\mathrm{i}$ 給出 $w^2 - 2w = (-3 + 4\mathrm{i}) - (2 + 4\mathrm{i}) = -5$，這是實數。第 (ii) 部分：它的平方 $-3 + 4\mathrm{i}$ 滿足 $16 = 4(1 - (-3))$。
- 最後部分：$t = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ 滿足 $1 - 3 + 2 = 0$。它的平方是 $-2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，而 $4q^2 = 48 = (-8)(-6) = p^3(p - 4)$。
- 我們以數千個隨機點作了數值檢驗，確認每個軌跡都映射到所述的曲線上，而且每條曲線上的每一點都能取到。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分忘記了實軸，以致在第 (ii) 部分漏掉那條半直線。又或者畫了整條 x 軸，而不是只畫 $x \ge 0$ 的部分。
- 沒有利用 $a^2 - b^2 = 2a$ 來得出 $p = 2a$。不用這一步的話，消去參數的過程會繁複得多。
- 在最後的草圖中漏掉了 $0 < p < 4$ 的空隙，或原點處的尖點。

STEP 之外

平方映射 $z \mapsto z^2$ 是最簡單的保角映射（conformal map）。它把角度加倍，這就是為甚麼這裏的直線和雙曲線會變成拋物線和帶尖點的曲線。在 $z = 0$ 處導數為零，角度不再保持不變，尖點正是由此而來。在流體流動和靜電學中，有一個標準技巧，就是利用這類映射把難處理的區域變成容易處理的區域。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《視覺複分析》）以圖像把這些映射解釋得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。