詳細解答

STEP II 1988，第 3 題

純數學 • 根的對稱性

> **STEP II 1988，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q3

關鍵思路

不要先從係數入手，而應先考慮根的集合。題目的性質是說，根的集合在運算 $k \mapsto 1/k$ 之下保持不變，所以兩個根要麼互換，要麼各自不動。加入第二個運算 $k \mapsto 1-k$ 後，同樣的推理可以再用一次。至於三次方程，把這兩個運算反覆施行，由一個根最多可得出六個值，而三次方程只容得下三個根：因此各根必須落在特殊的點上，使六個值之中有些重合。

解答

倒數性質

設兩根為 α 和 β（可能相等，也可能是複數），則 $\alpha+\beta=-b$ 及 $\alpha\beta=c$。首先，0 不可能是根，因為 0^{-1} 不存在；所以 $c\neq 0$。

映射（map）$k \mapsto 1/k$ 必須把每個根送到一個根，所以 $1/\alpha \in \{\alpha, \beta\}$。

- 若 $1/\alpha=\beta$，則 $\alpha\beta=1$，即 $c=1$。反過來，若 $c=1$，則兩根皆非零，且 $\beta=1/\alpha$，所以每個根的倒數（reciprocal）就是另一個根，而這性質對任何實數 b 都成立。（這包括 $b=\mp 2$ 時的重根（repeated root）± 1，以及 $|b|<2$ 時位於單位圓（unit circle）上的複數根。）
- 若 $1/\alpha=\alpha$ 但 $1/\alpha\neq\beta$，則 $\alpha=\pm 1$ 且 $\alpha\beta\neq 1$。把這性質應用於 β：它的倒數不是 α（因為 $\alpha\beta\neq 1$），所以 $1/\beta=\beta$，於是 $\beta=\pm 1$ 亦然。由於 $\alpha\beta\neq 1$，兩根必定是 1 和 -1，得出 $x^2-1=0$：$b=0$，$c=-1$。這方程確實具有該性質。

所以該性質成立，當且僅當

$$c = 1 \ (b \text{ 為任何實數}), \qquad \text{或} \qquad b = 0,\ c = -1.$$

加入性質 $k \mapsto 1 - k$

以 $1 - k$ 取代 $1/k$，重複同樣的論證：要麼 $1 - \alpha = \beta$，於是 $\alpha + \beta = 1$；要麼兩根都不動，即 $1 - \alpha = \alpha$ 及 $1 - \beta = \beta$，於是 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$，同樣有 $\alpha + \beta = 1$。無論哪種情況都有 $b = -1$；反過來，$b = -1$ 使兩根成為 α 和 $1 - \alpha$，所以該性質成立。

$b = 0$、$c = -1$ 這情況不符合此條件，所以我們需要 $c = 1$ 及 $b = -1$：

$$b = -1, \qquad c = 1,$$

得出 $x^2 - x + 1 = 0$，其根為 $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$。每個根的模（modulus）都是 1，實部都是 $\frac{1}{2}$，所以 $1/k$ 和 $1 - k$ 都等於共軛複數（complex conjugate）$\bar{k}$，即另一個根。

三次方程

現設 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 的係數為實數，並同時具有兩個性質。一如之前，0 不是根，1 也不是（否則 $1 - 1 = 0$ 便會是根）。

實係數三次方程至少有一個實根，稱之為 a。反覆施行這兩個運算，以下每一個都是根：

$$a, \quad \frac{1}{a}, \quad 1 - a, \quad \frac{1}{1 - a}, \quad 1 - \frac{1}{a} = \frac{a - 1}{a}, \quad \frac{1}{(a - 1)/a} = \frac{a}{a - 1}.$$

（第四個是第三個的倒數，第五個是 1 − 第二個，第六個是第五個的倒數。）這是六個實數，但三次方程最多只有三個相異的根，所以其中必有兩個重合。

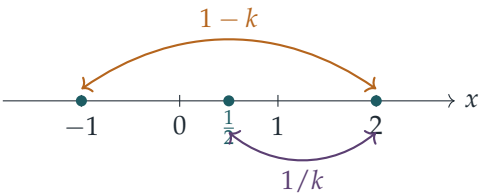
> **想一想** 「其中兩個相等」這句話，怎樣確定 a 的值？

把這六個映射稱為 $f_1, \ldots, f_6$，其中 f_1 為恆等映射（identity）。每一個映射的逆映射（inverse）都在這列表之中：$\frac{1}{k}$、$1 - k$ 和 $\frac{k}{k-1}$ 各自是自己的逆映射，而 $\frac{1}{1-k}$ 和 $\frac{k-1}{k}$ 則互為逆映射。還可以驗證，把任意兩個映射複合（compose），所得的仍是列表中的映射。所以若 $f_i(a) = f_j(a)$ 而 $i \neq j$，施以 f_i^{-1} 便得 $a = g(a)$，其中 $g = f_i^{-1} \circ f_j$ 是六個映射之一，且不是恆等映射。所以 a 是五個非恆等映射其中之一的不動點（fixed point）：

$$\frac{1}{a} = a \iff a = \pm 1, \qquad \frac{1}{1-a} = a \iff a^2 - a + 1 = 0,$$
$$1 - a = a \iff a = \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{a-1}{a} = a \iff a^2 - a + 1 = 0,$$
$$\frac{a}{a-1} = a \iff a(a - 2) = 0.$$

二次式 $a^2 - a + 1$ 沒有實根（它就是先前的那個二次式），而 $a \neq 0, 1$。因此 $a \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$。

無論 a 是其中哪一個，上面六個值恰好取遍 -1、2 和 $\frac{1}{2}$：映射 $1-k$ 把 -1 和 2 互換，並保持 $\frac{1}{2}$ 不動；而 $1/k$ 則把 2 和 $\frac{1}{2}$ 互換，並保持 -1 不動。



所以 -1、2 和 $\frac{1}{2}$ 是該三次方程的三個相異根。首一（monic）三次多項式由它的三個根完全決定，所以它必定是

$$(x+1)(x-2)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) = (x^2-x-2)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) = x^3-\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{3}{2}x+1.$$

反過來，這個三次方程確實具有兩個性質，因為它的根集 $\{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ 在 $k \mapsto 1/k$ 和 $k \mapsto 1-k$ 之下都被送回自身。所以

$$x^3-\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{3}{2}x+1=0$$

是唯一符合條件的三次方程，正如題目所求。

驗算

代入 $x=2$：$8-6-3+1=0$；$x=-1$：$-1-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+1=0$。各根之積為 $-1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = -1 = -r$，各根之和為 $\frac{3}{2} = -p$。留意這三次方程的係數，除正負號外，順讀和倒讀都一樣（$1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1$）：這種迴文（palindromic）形狀正是 $k \mapsto 1/k$ 所必然導致的。以電腦測試 20,000 組隨機的 (b, c)，結果印證了倒數條件；而隨機選取遠離 $0, \pm 1, \frac{1}{2}, 2$ 的實數 a，每次都得出六個相異的值。

常見錯誤

- 第一部分只答「$c=1$」：每個根都是自身倒數的那種情況，還會多出 $b=0$、$c=-1$。
- 忽略了 $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 這一對根，它在兩個映射之下都是封閉的。正是由實根出發，才能把它排除：實係數三次方程必有一個實根，而該實根的六個值不可能包含這兩個數。
- 只證明了題目給出的三次方程符合條件；題目要求的是證明它是唯一的一個。

STEP 之外

六個映射 $k \mapsto k$, $1/k$, $1-k$, $\frac{1}{1-k}$, $\frac{k-1}{k}$, $\frac{k}{k-1}$ 在複合運算下構成一個羣（group），它是對稱羣（symmetric group）S_3 的一個複本；它置換 $0, 1, \infty$ 這三個點，而那六個值就是四個點的交比（cross-ratio）所有可能的取值。點算的那一步正是軌道－穩定子定理（orbit–stabiliser theorem）：只有在被某個非恆等元素固定的點上，軌道（orbit）的長度才會少於六。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）闡述羣在集合上的作用，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（複分析的視覺化講解）則把這些映射展示為平面上的莫比烏斯變換（Möbius transformation）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。