詳細解答

STEP II 1988，第 2 題

純數學 • 對稱代數方程

> **STEP II 1988，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q2

關鍵思路

先去分母，再把兩條方程相減。右邊的平方差（difference of two squares）會產生因式 $y-z$，正好與左邊出現的 $y-z$ 對應，而假設 $y \neq z$ 恰恰讓我們可以把它約去。此後，一切都歸結為一條關於 x、y 和 z 的對稱式（symmetric expression），餘下的工作就交給對稱性完成。

解答

證明 $x+y+z=a$

由於 $y \neq 0$ 及 $z \neq 0$，我們可以把兩邊乘開：

$$2ay - 3y^2 = (z-x)^2, \tag{1}$$
$$2az - 3z^2 = (x-y)^2. \tag{2}$$

由 (1) 減去 (2)，並在右邊運用平方差，

$$\begin{aligned} 2a(y-z) - 3(y^2-z^2) &= (z-x)^2 - (x-y)^2 \\ &= [(z-x)-(x-y)][(z-x)+(x-y)] \\ &= (y+z-2x)(z-y). \end{aligned}$$

左邊是 $(y-z)[2a-3(y+z)]$，所以

$$(y-z)[2a-3(y+z)] = -(y-z)(y+z-2x).$$

想一想 究竟在哪一步需要用到 $y \neq z$？

就在這裏：因為 $y - z \neq 0$，我們可以把它除去，得到

$$2a - 3y - 3z = 2x - y - z \quad \Longrightarrow \quad 2a = 2x + 2y + 2z,$$

所以 $x + y + z = a$，正如所求。

證明第三條方程

把 $a = x + y + z$ 代回 (1)：

$$y(2x + 2y + 2z - 3y) = (z - x)^2 \implies 2xy - y^2 + 2yz = z^2 - 2zx + x^2,$$

整理後得

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0. \tag{3}$$

最引人注目的是，(3) 對 x、y 和 z 是對稱的。現在看看我們要證明甚麼。由於 $x \neq 0$，方程 $2a - 3x = \dfrac{(y-z)^2}{x}$ 等價於

$$x(2a - 3x) = (y - z)^2,$$

而代入 $a = x + y + z$ 後，這就是

$$x(2y + 2z - x) = y^2 - 2yz + z^2 \iff x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0,$$

這正是 (3)。因此

$$2a - 3x = \frac{(y-z)^2}{x}.$$

(事實上，三條方程都只是 (3) 連同 $a = x + y + z$，各自從其中一個變量的角度寫出來而已。)

當 $y = z$ 時，最後一條方程可以成立嗎？

可以。若 $y = z$，題目給出的兩條方程變成同一條方程 $2a - 3y = \dfrac{(y-x)^2}{y}$，而最後一條方程則變成 $2a - 3x = 0$，即 $a = \frac{3}{2}x$。把 $a = \frac{3}{2}x$ 代入第一條方程，

$$3x - 3y = \frac{(x-y)^2}{y} \iff 3y(x - y) = (x - y)^2 \iff (x - y)(x - 4y) = 0.$$

所以，舉例說，$x = y = z = 1$ 及 $a = \frac{3}{2}$ 滿足全部三條方程：

$$2a - 3y = 0 = \frac{(z-x)^2}{y}, \qquad 2a - 3z = 0 = \frac{(x-y)^2}{z}, \qquad 2a - 3x = 0 = \frac{(y-z)^2}{x}.$$

另一個例子是 $x = 4$、$y = z = 1$、$a = 6$：這時頭兩條方程都有 $2a - 3y = 9 = \frac{(1-4)^2}{1}$，而 $2a - 3x = 0 = \frac{0^2}{4}$。

所以，最後一條方程並非僅當 $y \neq z$ 時才成立：條件 $y \neq z$ 保證它成立，但當 $y = z$ 時它也可以成立。當 $y = z$ 時失去的是這個保證。例如 $x = 1$、$y = z = 2$、$a = \frac{13}{4}$ 滿足題目給出的兩條方程（兩邊各等於 $\frac{1}{2}$），但 $2a - 3x = \frac{7}{2} \neq 0$。還要留意，第一個例子中 $x + y + z = 3 \neq a$，所以當 $y = z$ 時，連第一個結論也可能不成立。

驗算

- 取 $x = 9$、$y = 4$、$z = 1$，它們滿足 (3)：$81 + 16 + 1 - 72 - 8 - 18 = 0$。這時 $a = 14$，而 $2a - 3y = 16 = \frac{(1-9)^2}{4}$、$2a - 3z = 25 = \frac{(9-4)^2}{1}$ 及 $2a - 3x = 1 = \frac{(4-1)^2}{9}$。三條方程全部成立。
- 一次數值檢驗在 10,000 組隨機有理數三元組上精確地驗證了恆等式 $(1) - (2) = (y - z)\big(2a - 2(x + y + z)\big)$，並在 (3) 上約 1,900 個滿足 $y \neq z$ 的隨機點確認了全部三條方程，另加上文三個 $y = z$ 的例子。

常見錯誤

- 除以 $y - z$ 而不說明為何可以這樣做。題目之所以給出這個假設，全是為了這一步。
- 最後一部分只答「不可以」或「可以」而沒有舉例。只要明確給出一組 $y = z$ 的三元組，問題便解決了。
- 以為 $y = z$ 會令最後一條方程不成立。它只是令保證消失而已。

STEP 之外

方程 (3) 是一個二次型（quadratic form），它的零點集是 (x, y, z) 空間中的一個雙錐面（double cone）。若 $x, y, z > 0$，設 $x = p^2$、$y = q^2$、$z = r^2$：則 (3) 可因式分解為

$$-(p + q + r)(-p + q + r)(p - q + r)(p + q - r) = 0,$$

這是邊長為 p, q, r 的三角形面積平方的 16 倍（希羅公式，Heron's formula）。所以 (3) 的意思是 $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ 構成一個退化三角形（degenerate triangle），例如上面驗算中的 $\sqrt{9} = \sqrt{4} + \sqrt{1}$。二次型及其分類是大學一年級線性代數（linear algebra）的標準課題；參見 Strang，*Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。