詳細解答

STEP II 1988，第 14 題

力學 • 轉動的剛體

STEP II 1988，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/88-s2-q14

關鍵思路

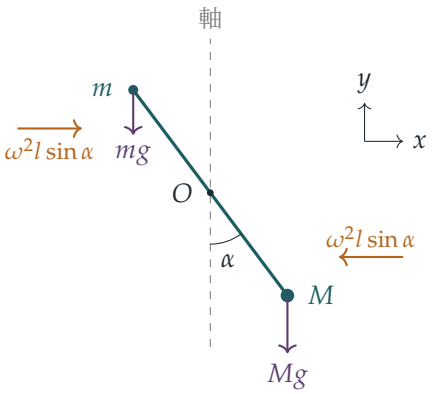
在穩定狀態（steady state）下，相對於包含桿的那個旋轉鉛垂平面，一切都靜止不動，所以每個質點（particle）只是以恆定速率沿水平圓周運動。這樣每個質點的加速度就完全確定了。接着由牛頓第二定律（Newton's second law）可知桿對每個質點所施的力，再加上關於輕桿（light rod）的兩個事實，問題便迎刃而解：作用於輕桿的各力必須平衡，而且（因為桿可繞軸自由擺動）這些力對軸的力矩（moment）也必須平衡。

解答

模型。 把兩個質量視為裝在輕質剛性桿上的質點，桿在 O 處光滑地樞接，因此軸不會沿其自身方向施加力偶（couple）。我們在包含桿的鉛垂平面內討論，這個平面以角速率（angular speed）ω 繞通過 O 的鉛垂線轉動。取 x 為此平面內的水平方向，y 為鉛垂向上，原點為 O。

設 M 位於 $(l\sin\alpha,\ -l\cos\alpha)$，$m$ 位於 $(-l\sin\alpha,\ l\cos\alpha)$；稍後便會看到，較重的質點必定是在下方的那個。每個質點都以恆定速率，沿半徑為 $l\sin\alpha$ 的水平圓周繞鉛垂軸運動，所以其加速度大小為 $\omega^2 l\sin\alpha$，方向水平指向軸：

$$\mathbf{a}_M = (-\omega^2 l\sin\alpha,\ 0), \qquad \mathbf{a}_m = (\omega^2 l\sin\alpha,\ 0).$$



（琥珀色箭頭表示加速度，紫紅色箭頭表示重量。）

桿所施的力。 設 $\mathbf{R}_M$ 和 $\mathbf{R}_m$ 分別為桿對 M 和 m 所施的力。這些力不一定沿着桿的方向：剛性桿也可以向側面施力。由牛頓第二定律得 $\mathbf{R}_M - Mg\,\mathbf{j} = M\mathbf{a}_M$，所以

$$\mathbf{R}_M = \left(-M\omega^2 l \sin\alpha,\ Mg\right), \qquad \mathbf{R}_m = \left(m\omega^2 l \sin\alpha,\ mg\right).$$

根據牛頓第三定律（Newton's third law），兩個質點對桿所施的力，在 M 的一端為 $-\mathbf{R}_M$，在 m 的一端為 $-\mathbf{R}_m$。

? **想一想** 軸在 O 處對桿施加一個未知的力。在不知道這個力的情況下，我們怎樣取力矩？

對軸取力矩。 軸的力作用於 O，所以它對 O 沒有力矩；而桿可自由擺動，所以軸沿其自身方向（即通過 O 並垂直於我們這個平面的直線）不提供力偶。輕桿本身沒有角動量（angular momentum），所以兩端的力對這條直線的力矩必須互相抵消。作用於 (x, y) 的力 (F_x, F_y)，其力矩為 $xF_y - yF_x$（以逆時針方向為正）。對於作用於 $(l\sin\alpha, -l\cos\alpha)$ 的 $-\mathbf{R}_M$：

$$l\sin\alpha\,(-Mg) - (-l\cos\alpha)(M\omega^2 l\sin\alpha) = -Mgl\sin\alpha + M\omega^2 l^2 \sin\alpha\cos\alpha,$$

而對於作用於 $(-l\sin\alpha,\, l\cos\alpha)$ 的 $-\mathbf{R}_m$：

$$(-l\sin\alpha)(-mg) - l\cos\alpha\,(-m\omega^2 l\sin\alpha) = mgl\sin\alpha + m\omega^2 l^2 \sin\alpha\cos\alpha.$$

令兩者之和為零，並除以 $l\sin\alpha \neq 0$（因為 $\alpha > 0$）：

$$(M+m)\,\omega^2 l\cos\alpha = (M-m)\,g \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)\frac{g}{l\cos\alpha},$$

其中除以了 $\cos\alpha > 0$，這正是所需的結果。

假如 M 反而是在上方的質點，同樣的計算（把 M 和 m 對調）會得出 $(M+m)\omega^2 l\cos\alpha = (m-M)g < 0$，這是不可能的。所以較重的質點確實如所假設的那樣，位於 O 的下方。

軸所受的反作用力。 桿是輕的，所以作用於它的合力為零：軸對桿所施的力為 $\mathbf{R}_M + \mathbf{R}_m$，因此桿對軸所施的力為

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{R}_M + \mathbf{R}_m) = \Big((M-m)\,\omega^2 l\sin\alpha,\ -(M+m)\,g\Big).$$

這個力指向下方，其水平分量則在 M 的一側指向外。若 ϕ 是它與鉛垂向下方向的夾角，則代入 ω^2 的值，可得

$$\begin{aligned}\tan\phi &= \frac{(M-m)\,\omega^2 l\sin\alpha}{(M+m)\,g} = \frac{M-m}{M+m}\cdot\frac{l\sin\alpha}{g}\cdot\frac{M-m}{M+m}\cdot\frac{g}{l\cos\alpha}\\ &= \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\tan\alpha.\end{aligned}$$

由於 $0 \le \phi < \frac{1}{2}\pi$，$\phi = \tan^{-1}\left[\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\tan\alpha\right]$，這就是所需的結果。

驗算

- 若 $m = 0$，這個系統就是一個長度為 l 的圓錐擺（conical pendulum），而公式給出我們熟悉的 $\omega^2 = g/(l\cos\alpha)$。這時反作用力的角度為 α：桿沿着自身方向拉，就像一條繩一樣。
- 若 $M = m$，桿在 O 處平衡，所以 $\omega = 0$，反作用力是鉛垂的，大小為 $2Mg$；兩條公式都與此相符。
- 數值上，取 $M = 3$、$m = 1$、$l = 0.7$、$\alpha = 0.6$ 和 $g = 9.8$，可得 $\omega^2 \approx 8.48$，反作用力的角度約為 $9.71°$。把桿的角度所滿足的運動方程（equation of motion）由靜止於 α 開始逐步數值計算，角度一直保持在 α；而在三維空間中由兩個質點的位置計算它們的加速度，亦得出相同的角度。

常見錯誤

- 假設桿對質點所施的力沿着桿的方向。事實並非如此：剛性桿可以傳遞側向的力，這正是我們要取力矩的原因。
- 忘記了 m 的加速度同樣指向軸，因此與 M 的加速度位於相反的一側。反作用力的水平分量會部分抵消，得出的是 $M-m$ 而不是 $M+m$。
- 把較重的質點放在上方。力矩方程顯示這種情況不可能發生。

STEP 之外

桿對 O 的角動量並不平行於鉛垂的自轉軸，所以它會隨着系統旋轉而改變方向。要改變角動量就需要力偶，而這個力偶由軸提供，其方向垂直於我們剛才所用的那個方向。這就是運用慣性張量（inertia tensor）的剛體動力學（rigid-body dynamics）的起點，也解釋了為甚麼平衡不良的車輪會在軸承上搖晃。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對此有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。