詳細解答

STEP II 1988，第 13 題

力學 • 摩擦力與平衡

STEP II 1988，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

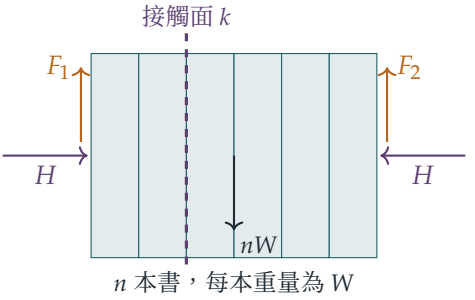
step.maths.org/questions/88-s2-q13

關鍵思路

托住書本的每一個垂直力都是摩擦力（friction），而任何接觸面上的摩擦力都不能超過該處法向反作用力（normal reaction）的 μ 倍。因此我們需要兩樣東西：每個接觸面上的法向反作用力（由水平方向的平衡（equilibrium）很容易求得），以及每個接觸面必須提供的摩擦力（考慮適當選取的一組書本在垂直方向的平衡）。然後我們找出哪一個接觸面最接近滑動。把相鄰的一組書本視為一個整體，可以令代數運算保持簡短。

解答

模型。 設有 n 本相同的書，每本重量為 W，書的封面保持垂直。每隻手以水平力 $H \leq Q$ 壓向書本，並提供向上的摩擦力；把這兩個摩擦力記作 F_1（左手）和 F_2（右手）。由於每隻手的垂直力正正就是這個摩擦力，所以我們需要 $F_1, F_2 \leq P$。題目指明可以忽略轉動效應，因此我們只需考慮每本書或每組書本的力平衡。



法向反作用力。 把書本由左至右編號為 $1, 2, \ldots, n$，並設接觸面 k 為第 k 本書與第 $k+1$ 本書之間的接觸面（$1 \le k \le n-1$）。作用於第 $1, \ldots, k$ 本書這一組書本上的水平力，只有左手的推力 H 和來自第 $k+1$ 本書的法向反作用力。所以該反作用力同樣是 H：每一個接觸面，不論是手與書之間還是書與書之間，法向反作用力都是 H，因此每個接觸面所能提供的摩擦力大小最多為 μH。

雙手。 在垂直方向上，對整排書本而言，

$$F_1 + F_2 = nW.$$

F_1, F_2 各自最多為 P（臂力），亦最多為 $\mu H \le \mu Q$（摩擦力）。記 $L = \min(P, \mu Q)$。於是 $nW = F_1 + F_2 \le 2L$，所以

$$n \le \frac{2L}{W} = \frac{2\min(P, \mu Q)}{W}.$$

這是必要條件。若此條件成立，最佳的做法是盡力壓緊，即 $H = Q$（H 愈大，只會提高每一個摩擦力的上限），並把負荷平均分配，即 $F_1 = F_2 = \frac{1}{2}nW \le L$。這樣雙手都在各自的限度之內。

想一想 即使雙手托得住，書本會不會在中間某處互相滑過？

書本之間的接觸面。 我們直接驗證這一點。對第 $1, \ldots, k$ 本書這一組書本應用垂直方向的平衡。它的重量 kW 由手提供的 $F_1 = \frac{1}{2}nW$ 以及來自第 $k+1$ 本書的摩擦力 f_k（以向上為正）所承托：

$$f_k = kW - \tfrac{1}{2}nW = \left(k - \tfrac{n}{2}\right) W.$$

對於 $1 \le k \le n-1$，我們有 $\left|k - \frac{n}{2}\right| \le \frac{n}{2} - 1$，等號在 $k = 1$ 和 $k = n-1$ 時成立，即緊貼最外側兩本書的接觸面。所以任何接觸面所需的最大摩擦力為 $\left(\frac{n}{2} - 1\right)W$，比每隻手所提供的 $\frac{1}{2}nW$ 少 W。由於每個接觸面的上限與手的一樣，都是 μQ，所以只要雙手不滑動，就沒有任何兩本書會互相滑動。（從物理上看：最外側的每本書由手托住，而它向內傳遞的摩擦力，就是手的摩擦力減去它本身的重量。）

答案。 這排書本能被提起，當且僅當 $nW \le 2\min(P, \mu Q)$。所以書本數目的最大值為

$$\boxed{n_{\max} = \left\lfloor \frac{2\min(P,\, \mu Q)}{W} \right\rfloor}$$

即同時不超過 $2P/W$ 和 $2\mu Q/W$ 的最大整數。哪一個上限起作用，便說明了是甚麼限制着圖書館管理員：當 $P < \mu Q$ 時是提舉的臂力，當 $\mu Q < P$ 時則是握力。

驗算

- 取 $W = 10\,\mathrm{N}$、$P = 60\,\mathrm{N}$、$Q = 100\,\mathrm{N}$ 及 $\mu = 0.4$。則 $\min(60, 40) = 40$，而 $n_{\max} = 8$。有 8 本書時，每隻手提供 $40\,\mathrm{N}$ 的摩擦力，剛好達到其上限，而最吃力的接觸面需要 $30\,\mathrm{N} < 40\,\mathrm{N}$。若加上第九本書，每隻手便需要提供 $45\,\mathrm{N}$。
- 只有一本書（$n = 1$）時沒有書本之間的接觸面，我們只需要 $W \le 2\min(P, \mu Q)$，這顯然是正確的。
- 我們用電腦對 W, P, Q, μ 的 3000 組隨機取值求解了整組不等式（任意 $H \le Q$、任意的 F_1, F_2 分配、每一個接觸面），所得的最大可行 n 每次都與公式吻合。

常見錯誤

- 忘記了手臂的垂直力就是摩擦力，所以 P 和 μQ 這兩個限制是作用於同一個力之上。
- 未經驗證便假設中間的書本是最薄弱之處。書本之間的力比雙手處的力小，而不是大。
- 只給出 $2\min(P, \mu Q)/W$ 而沒有取下整（floor）：答案必須是整數本書。

STEP 之外

這裏的摩擦力是靜不定的（statically indeterminate）：平衡條件只確定了 $F_1 + F_2$，而我們問的是有沒有某一種分配方式能令每個接觸面都不超出其限度。這類問題其實是小型的線性規劃（linear programme），而「檢查是否存在某個可容許的平衡狀態」這個想法，同樣是結構極限分析（limit analysis）的基礎。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）是一個好去處，可以看到摩擦力與平衡如何得到嚴謹的處理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。