詳細解答

STEP II 1988，第 12 題

力學 • 下落的鏈條

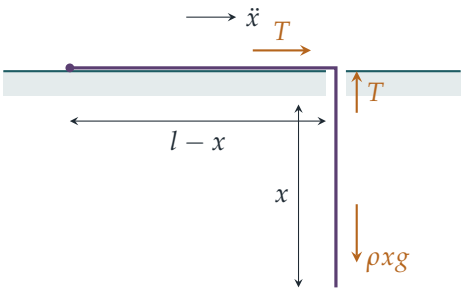
> **STEP II 1988，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q12

關鍵思路

由於繩子不可伸長（inextensible），繩上每一小段的速率都相同，所以整條繩子就像一個物體，而推動它的力就是垂在桌面以下那一段的重量。隨着愈來愈多繩子穿過小孔，這個重量不斷增大，於是得到一條以下垂長度為未知量的簡單線性微分方程（linear differential equation）。它的解是雙曲餘弦（hyperbolic cosine），而所求的時間則由反解這個函數得出。

解答

整個系統完全沒有摩擦：桌面光滑（smooth），小孔既小且光滑（所以它只改變繩子的方向，而不會沿繩子方向施加任何力），而繩子每單位長度的質量為 ρ。設在時間 t 時垂在桌面以下的長度為 x，則留在桌面上的長度為 $l - x$。起初 $x = l - d$ 且 $\dot{x} = 0$，而當 $x = l$ 時繩端到達小孔頂部。由於桌子的高度大於 l，在此之前下垂部分不會碰到地面。



設 T 為繩子在小孔處的張力（tension）。由於小孔光滑，緊貼小孔上方和下方的張力同為 T。

桌面上的部分。它的質量為 $\rho(l-x)$，以加速度 $\ddot{x}$ 沿水平方向移向小孔（因為繩子不可伸長，它與下垂部分移動得一樣快）。由於桌面光滑，作用在它上面的水平力只有張力 T。所以

$$\rho(l-x)\,\ddot{x} = T.$$

下垂的部分。它的質量為 ρx，以加速度 $\ddot{x}$ 向下運動，所受的力是向下的重量 $\rho x g$ 和向上的張力 T：

$$\rho x\,\ddot{x} = \rho x g - T.$$

把兩條方程相加，便可消去 T：

$$\rho l\,\ddot{x} = \rho g x, \qquad \text{即} \qquad \ddot{x} = n^2 x, \quad n = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

想一想 小孔兩邊的繩子長度一直在變。對每一段分別使用 $F = ma$，真的沒有問題嗎？

沒有問題。每條方程都是在某一瞬間，應用於該瞬間位於小孔那一邊的那一段繩子；整條繩子以同一速率 $\dot{x}$ 一起運動，所以整條繩子的動量（momentum）變化率是 $\rho l\ddot{x}$，而沿運動方向有分量的外力，就只有下垂部分的重量 $\rho x g$。（桌面的反作用力抵銷了水平部分的重量，而小孔只是令繩子轉向。）因此合併後的方程 $\rho l\ddot{x} = \rho g x$ 正是整條繩子的牛頓第二定律（Newton's second law）。下文的能量驗算亦印證了這一點。

$\ddot{x} = n^2 x$ 的通解（general solution）是 $x = A\cosh nt + B\sinh nt$。由 $t = 0$ 時 $\dot{x} = 0$ 得 $B = 0$，再由 $t = 0$ 時 $x = l - d$ 得 $A = l - d$：

$$x = (l-d)\cosh nt.$$

繩端在 $x = l$ 時到達小孔頂部，即在滿足下式的時間 t_1：

$$\cosh nt_1 = \frac{l}{l-d}.$$

由於 $l/(l-d) > 1$，此方程恰有一個正數解。利用 $\operatorname{arcosh} u = \ln(u + \sqrt{u^2-1})$，有

$$\sqrt{u^2-1} = \frac{\sqrt{l^2-(l-d)^2}}{l-d} = \frac{\sqrt{2ld-d^2}}{l-d},$$

所以所需時間為

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\operatorname{arcosh}\!\left(\frac{l}{l-d}\right) = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\ln\left(\frac{l+\sqrt{2ld-d^2}}{l-d}\right).}$$

驗算

- **能量**。取桌面為勢能（potential energy）的零點。下垂部分的質心（centre of mass）位於深度 $x/2$ 處，所以它的勢能是 $-\frac{1}{2}\rho g x^2$。由靜止開始，能量守恆（conservation of energy）給出 $\frac{1}{2}\rho l\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\rho g\left(x^2 - (l-d)^2\right)$，對 t 求導便再次得到 $l\ddot{x} = gx$。
- d **很小**。如果 d 極小，幾乎整條繩子都垂着，它應以接近 g 的加速度下落，所需時間約為 $\sqrt{2d/g}$。事實上，當 d 很小時，由 $\cosh nt_1 = 1 + \frac{d}{l} + \cdots$ 和 $\cosh nt_1 \approx 1 + \frac{1}{2}n^2t_1^2$ 可得 $t_1^2 \approx 2d/(n^2 l) = 2d/g$。
- $d \to l$。如果幾乎沒有繩子垂下，繩子幾乎不會動，於是 $t_1 \to \infty$，正如對數式所顯示的那樣。
- **數值**。取 $l = 2\,\mathrm{m}$、$d = 1.5\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，公式給出 $t_1 \approx 0.932\,\mathrm{s}$，與對這個運動逐步進行數值積分所得的結果吻合。

常見錯誤

- 只對下垂部分寫出 $\rho x\ddot{x} = \rho xg$，忘記了它還要拖動桌面上的繩子（換句話說，是用錯了質量：被加速的是整條繩子，質量為 ρl）。
- 嘗試用 $x = A\cos nt$ 形式的解：方程是 $\ddot{x} = +n^2x$，所以運動是按指數增長，而不是振動。
- 把結束條件定為 $x = d$ 而不是 $x = l$：繩端到達小孔時，整段長度 l 都垂在下面。

STEP 之外

這是一個質量分佈隨時間變化的問題：總質量固定不變，但受重力驅動的那一部分隨位置而改變，由此得到一條線性方程，其解為指數函數。假如繩子是從無摩擦的桌邊滑落，同時有一堆原本靜止的繩子不斷被扯動起來，動量便會在非彈性（inelastic）的「猛扯」中損失，能量亦不再守恆；分辨這兩類情況，是大學力學課程中的經典課題。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對質量流動的系統以及鏈條和繩索的問題有細緻的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。