詳細解答

STEP II 1988，第 11 題

力學 • 繩纏繞柱子

> **STEP II 1988，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q11

關鍵思路

繩子未纏上圓柱的部分，總是沿切線（tangent）離開圓柱。因此質點的位置就是「接觸點加上一個長度等於未纏繞繩長的切向量」，而這很容易用角 θ 表示出來。求導之後，有兩項互相抵消，速度原來與繩子垂直。於是張力（tension）不做功，速率保持在初始值，而速率公式就成為一條關於 θ 的可分離變量微分方程（separable differential equation）。

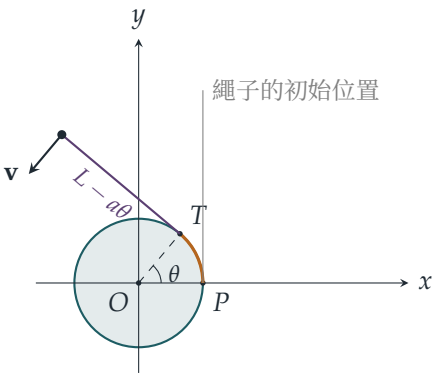
解答

建立模型

我們把質點看成光滑桌面上的一個質點（point mass），繫着一條始終拉緊的輕而不可伸長的繩子（light inextensible string）。重力與法向反作用力（normal reaction）都沿鉛垂方向，互相抵消，所以唯一的水平力就是張力。

取以 O 為原點的坐標軸，並把 P 放在 $(a, 0)$。繩子起初垂直於 OP，所以它在 P 處與圓柱相切，我們設質點從 (a, L) 出發。（若取鏡像的情況，只是把 y 坐標的正負號反轉。）當繩子沿逆時針方向纏上圓柱，纏過角 θ 之後，長度 $a\theta$ 的一段貼在由 P 起的圓弧上，而繩子離開圓柱的位置是

$$T = a(\cos\theta,\ \sin\theta).$$



繩子未纏上的部分長 $L-a\theta$，沿 T 處的切線伸展。指向繩子展開方向的單位切向量（unit tangent）是 $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$：它垂直於 OT，而且當 $\theta=0$ 時等於 $(0,1)$，與起始位置吻合。

位置與速度

因此質點的位置向量（position vector）是

$$\mathbf{r}=a\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+(L-a\theta)\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos\theta-(L-a\theta)\sin\theta\\ a\sin\theta+(L-a\theta)\cos\theta\end{pmatrix}.$$

利用鏈式法則（chain rule）和乘積法則（product rule）對 t 求導，

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}&=a\dot\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}-a\dot\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}+(L-a\theta)\dot\theta\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\\&=-(L-a\theta)\dot\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

首兩項互相抵消：接觸點沿圓柱移動所帶來的效果，恰好被未纏上的繩子縮短所抵銷。

由於 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 是單位向量，$L-a\theta>0$，而且繩子纏上圓柱期間 $\dot\theta>0$，所以速率是

$$|\dot{\mathbf{r}}|=(L-a\theta)\dot\theta,$$

正是所求。

碰到圓柱所需的時間

想一想 繩子一直拉着質點，為甚麼質點的速率仍會保持等於 v？

速度平行於 $(\cos\theta,\sin\theta)$，而繩子（因而張力）則沿 $(-\sin\theta,\cos\theta)$ 方向。兩者互相垂直，所以張力不做功。桌面光滑，張力是唯一的水平力。因此動能（kinetic energy）保持不變，速率也隨之恆等於 v。張力只會改變速度的方向。

所以，在質點到達圓柱之前的所有時刻 t，

$$(L - a\theta)\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v, \qquad \theta(0) = 0.$$

分離變量，並由 0 積分至 t，

$$L\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2 = vt.$$

當整條繩子都纏上圓柱時，質點便碰到圓柱，即 $a\theta = L$，所以 $\theta = L/a$。於是

$$vt = \frac{L^2}{a} - \frac{L^2}{2a} = \frac{L^2}{2a}, \qquad \text{所以} \qquad t = \frac{L^2}{2av},$$

這就是所求的時間。

驗算

- 當 $\theta = 0$ 時，公式給出 $\mathbf{r} = (a, L)$ 及 $\dot{\mathbf{r}} = (-L\dot{\theta}, 0)$，與初始的繩子垂直，理應如此。
- 單位：$L^2/(av)$ 的單位是 $\mathrm{m}^2/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{m\,s^{-1}}) = \mathrm{s}$。
- 另一個理解答案的方法：質點整條路徑的長度是

  $$\int_0^{L/a} (L - a\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{L^2}{2a},$$

  並以恆定速率 v 走完。
- 我們用數值方法模擬了這個運動：一條非常硬的繩子纏繞在圓柱上，取 $a = 1$、$L = 3$、$v = 2$。模擬所得的時間與 $L\theta - \frac{1}{2}a\theta^2 = vt$ 相符，誤差在 10^{-5} 以內；而把 $\dot{\theta} = v/(L - a\theta)$ 積分至 $a\theta = L$，得到 2.25，即 $L^2/(2av)$。

常見錯誤

- 使用關於 O 的角動量守恆（conservation of angular momentum）。張力並不通過 O（它沿切線作用），所以關於 O 的角動量並不守恆。能量才是合適的工具。
- 把未纏上的繩子寫成沿 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 方向，即沿徑向，而不是沿切線方向。
- 忘記速率公式需要 $\dot{\theta} > 0$。該向量的絕對值是 $(L - a\theta)|\dot{\theta}|$。

STEP 之外

質點所描出的路徑是圓的漸伸線(involute)，即從線軸上拉緊展開的一條線，其末端所描出的曲線。齒輪的齒之所以造成那種形狀，正是因為漸伸線；它也是惠更斯（Huygens）

研究擺鐘時的核心。它的弧長 $\int (L - a\theta)\, \mathrm{d}\theta$ 是平面曲線微分幾何（differential geometry，包括漸屈線（evolute）、漸伸線和曲率（curvature））的一個入門例子。至於力學方面，包括能量與角動量在甚麼情況下守恆、甚麼情況下不守恆，可閱讀 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（一本大學力學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。