詳細解答

# STEP II 1988，第 10 題

純數學 • 拋物面的向量幾何

**STEP II 1988，第 10 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/88-s2-q10

## 關鍵思路

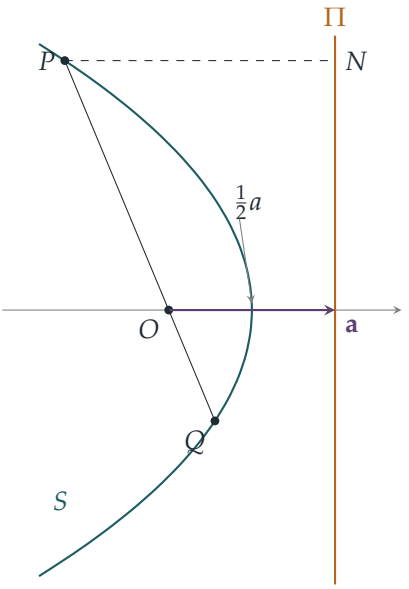
方程中的兩個部分各有清晰的幾何意義：$r$ 是與 $O$ 的距離，而 $(a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r})/a$ 是與平面 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = a^2$ 的有向距離（signed distance）。因此 $S$ 是一個旋轉拋物面（paraboloid of revolution），以 $O$ 為焦點（focus），以該平面為準面（directrix）。至於其餘部分，可沿着通過 $O$ 的直線來處理：把直線 $OP$ 上的點寫成 $\lambda\mathbf{p}$，把通過 $O$ 且同時垂直於 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{p}$ 的直線上的點寫成 $\mu\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$，然後代入 $S$ 的方程。$\lambda$ 的正負號十分重要，因為 $|\lambda\mathbf{p}| = |\lambda| p$。

## 解答

### 軌跡

設 $\Pi$ 為平面 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = a^2$。它的單位法向量（unit normal）是 $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/a$，與 $O$ 的距離為 $a$，並位於 $\mathbf{a}$ 所指的一側。由點 $\mathbf{r}$ 到 $\Pi$ 的垂直距離是

$$d(\mathbf{r}) = |\,a - \hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r}\,| = \frac{|a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}|}{a}.$$




上圖顯示 $S$ 被一個包含 $\mathbf{a}$ 的平面所截出的截面。點 $P$ 與 $O$ 的距離，等於它與其在 $\Pi$ 上的垂足 $N$ 的距離。曲面與軸相交於 $\frac{1}{2}\mathbf{a}$，即 $O$ 與 $\Pi$ 的正中間。

$S$ 上的點是等距的。若 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}+ar=a^2$，則 $a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=ar\geq 0$。因此

$$d(\mathbf{r})=\frac{a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{a}=\frac{ar}{a}=r=|OR|.$$

等距的點都在 $S$ 上。假設 $r=d(\mathbf{r})$，即 $ar=|a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}|$。若 $a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\geq 0$，這正是 $S$ 的方程。否則 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}>a^2$，而該條件表示 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=ar+a^2>ar$。這與 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\leq ar$（柯西–施瓦茨不等式，Cauchy–Schwarz）矛盾。所以在 $\Pi$ 另一側的點都不會等距，而 $S$ 恰好就是與 $O$ 和 $\Pi$ 等距的所有點所組成的集合。這是一個旋轉拋物面，其旋轉軸是通過 $O$ 且方向為 $\mathbf{a}$ 的直線。

以下兩個推論稍後會用到。對於 $S$ 上的點 $P$，

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}=a^2-ap. \qquad (*)$$

此外 $a^2=\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}+ap\leq 2ap$，所以 $p\geq\frac{1}{2}a$，從而 $2p-a\geq 0$。等號只在 $\mathbf{p}$ 是 $\mathbf{a}$ 的正數倍時成立，即 $P$ 是頂點（vertex）$\frac{1}{2}\mathbf{a}$ 的時候。

### 第二個交點 $Q$

直線 $OP$ 上的點是 $\lambda\mathbf{p}$，其中 $|\lambda\mathbf{p}|=|\lambda|p$。代入 $S$ 的方程得

$$\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}+a|\lambda|p=a^2.$$

**想一想** 為甚麼 $Q$ 不可能與 $P$ 位於 $O$ 的同一側？

若 $\lambda > 0$，左方是 $\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + ap) = \lambda a^2$，所以 $\lambda = 1$，這就是 $P$ 本身。（從幾何上看，由焦點出發的射線與拋物面最多相交一次。）因此 $Q$ 對應 $\lambda < 0$，這時 $|\lambda| = -\lambda$。利用 $(*)$，

$$\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} - ap) = a^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda(a^2 - 2ap) = a^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = -\frac{a}{2p-a}.$$

只要 $2p > a$，即 $P$ 不是頂點，這個值便如所要求般是負數。（在頂點處，直線 $OP$ 就是軸，它與 $S$ 只相交一次。）因此

$$\boxed{\mathbf{q} = -\frac{a}{2p-a}\,\mathbf{p}} \qquad \text{及} \qquad |OQ| = \frac{ap}{2p-a}.$$

**點 $T$ 和 $T'$**

通過 $O$ 且同時垂直於 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{p}$ 的直線是 $\mathbf{t} = \mu\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$。（我們需要 $\mathbf{a}\times\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$，所以 $P$ 不在軸上。）由於 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{t} = 0$，$S$ 的方程簡化為 $at = a^2$，即 $|\mathbf{t}| = a$。所以 $T$ 和 $T'$ 位於 $S$ 與通過 $O$ 且平行於 $\Pi$ 的平面相交所得的圓上，並且

$$|\mu|\,|\mathbf{a}\times\mathbf{p}| = a.$$

**想一想** 在不知道 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{p}$ 之間夾角的情況下，怎樣求出 $|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|$？

利用恆等式（identity）$|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|^2 = a^2p^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})^2$，它其實就是 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ 的另一種寫法。然後代入 $(*)$：

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|^2 &= a^2p^2 - (a^2 - ap)^2\\ &= a^2p^2 - a^4 + 2a^3p - a^2p^2\\ &= a^3(2p-a).\end{aligned}$$

因此

$$|\mu| = \frac{a}{a^{3/2}\sqrt{2p-a}} = \frac{1}{\sqrt{a(2p-a)}} = \frac{1}{\sqrt{2ap-a^2}},$$

而 $T$ 和 $T'$ 的位置向量（position vector）是 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2ap-a^2}}\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$，正如所求。

**三角形 $PQT$ 的面積**

$P$、$O$、$Q$ 三點共線（collinear），而 $O$ 在 $P$ 與 $Q$ 之間。向量 $\mathbf{t}$ 平行於 $\mathbf{a}\times\mathbf{p}$，所以它垂直於 $\mathbf{p}$，從而垂直於直線 $PQ$。因此 $OT$ 是三角形 $PQT$ 中由 $T$ 引出的高，其長度為 $a$。底邊是

$$|PQ| = p + \frac{ap}{2p-a} = \frac{p(2p-a)+ap}{2p-a} = \frac{2p^2}{2p-a}.$$

因此

$$\text{面積} = \tfrac{1}{2}\cdot|PQ|\cdot|OT| = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2p^2}{2p-a}\cdot a = \frac{ap^2}{2p-a},$$

正如所求。把 $T$ 換成 $T'$，結果同樣成立。

## 驗算

- 取 $\mathbf{a} = (2,0,0)$ 和 $P = (-1.25,3,0)$，即圖中的那一點。這時 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + ap = -2.5 + 2(3.25) = 4 = a^2$，所以 $P$ 在 $S$ 上。公式給出 $\mathbf{q} = -\frac{2}{4.5}\mathbf{p} = (0.556,-1.333,0)$，而 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{q} + aq = 1.111 + 2.889 = 4$，所以 $Q$ 也在 $S$ 上。
- 取 $P$ 為正焦弦（latus rectum）的一個端點，於是 $\mathbf{p}\perp\mathbf{a}$ 且 $p = a$。這時 $\mathbf{q} = -\mathbf{p}$，由對稱性可知這是正確的。面積是 $\frac{1}{2}(2a)(a) = a^2$，而公式給出 $a\cdot a^2/a = a^2$。
- 兩個焦距滿足 $\dfrac{1}{OP} + \dfrac{1}{OQ} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{2p-a}{ap} = \dfrac{2}{a}$，這正是拋物線經典的焦弦(focal chord)性質。
- 在數值上，我們隨機選取了 20 000 組 $\mathbf{a}$ 和 $P$，檢驗了 $Q$、$T$、$T'$ 和面積。最大誤差約為 $10^{-11}$。

## 常見錯誤

- 對所有 $\lambda$ 都寫成 $|\lambda\mathbf{p}| = \lambda p$。這樣唯一的解就是 $\lambda = 1$，便無法找到 $Q$。
- 在第一部分忘記證明逆命題（converse）。位於 $\Pi$ 另一側的點滿足 $|a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{r} - a^2$，我們必須排除這些點。
- 用 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{PT}$ 的向量積（cross product）來計算面積。這樣做是可行的，但比起留意到 $OT\perp PQ$ 要冗長得多。

## STEP 之外

這就是圓錐曲線（conic）的焦點–準線定義，只是放在三維空間中，並且不依賴坐標。設 $e$ 為離心率（eccentricity），則曲面 $e\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + ar = e\,a^2$（與 $O$ 的距離等於與 $\Pi$ 的距離的 $e$ 倍）給出其他以 $O$ 為一個焦點的旋轉二次曲面（quadric of revolution）。關係式 $1/OP + 1/OQ = 2/a$ 是極方程(polar equation) $\ell/r = 1 + e\cos\theta$ 的向量形式，而這個方程在軌道力學（orbital mechanics）中佔有核心地位。若想進一步學習向量代數，Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）是很好的下一步；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題）則收錄了更多這類風格的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。