詳細解答

STEP II 1988，第 1 題

純數學 • 部分分式與級數

> **STEP II 1988，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q1

關鍵思路

把 f 分解成部分分式（partial fractions），整個問題便歸結為把兩個簡單的分式 $\frac{1}{x-1}$ 和 $\frac{1}{x-2}$ 展開成等比級數（geometric series）。唯一真正要決定的，是每個分式應該朝哪個方向展開。等比級數 $\sum r^n$ 只在 $|r|<1$ 時收斂（converge），所以對每個分式，我們都把分母兩項之中絕對值較大的一項提出來。當 $|x|$ 先後越過 1 和 2 時，這個選擇便會改變，這就是為甚麼會有三個不同的展開式。

解答

部分分式

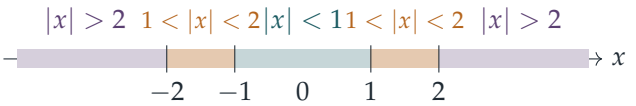
設 $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2}$。由遮蓋法（cover-up rule）得 $A = \frac{1}{1-2} = -1$ 及 $B = \frac{1}{2-1} = 1$，所以

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

我們需要的兩件基本工具都來自等比級數

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \qquad (|r|<1),$$

其中 r 取 x、$\frac{x}{2}$、$\frac{1}{x}$ 或 $\frac{2}{x}$ 其中之一，視乎在所討論的範圍內哪一個的模（modulus）小於 1。



範圍 $|x| < 1$

這裏 $|x| < 1$，同時 $|\frac{x}{2}| < \frac{1}{2} < 1$，所以兩個分式都可以展開成 x 的冪：

$$-\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$
$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

兩式相加，得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad (|x| < 1),$$

正是所求。

範圍 $1 < |x| < 2$

第二個分式維持不變：我們仍然有 $|\frac{x}{2}| < 1$，所以 $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(\frac{x}{2})^n$，與之前完全一樣。

> **想一想** 為甚麼第一個分式不能繼續使用 $\sum x^n$？

因為現在 $|x| > 1$，各項 x^n 並不趨向零，所以 $\sum x^n$ 發散（diverge）。我們改為從分母提出較大的一項 x，餘下的公比是 $\frac{1}{x}$，而 $|\frac{1}{x}| < 1$：

$$-\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} x^{-n} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^{-(n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n},$$

其中最後一步只是把 $n+1$ 重新記作 n。把兩部分相加，得

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad (1 < |x| < 2),$$

正是所求。

範圍 $|x| > 2$

第一個分式沿用上一個範圍的展開式，因為 $|\frac{1}{x}| < \frac{1}{2} < 1$。但現在 $|\frac{x}{2}| > 1$，所以第二個分式也要用同樣的方法倒轉過來展開：提出 x，餘下公比 $\frac{2}{x}$，而 $|\frac{2}{x}| < 1$：

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{-(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{-n}.$$

因此，當 $|x| > 2$ 時，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1) x^{-n}.$$

$n=1$ 的係數是 $2^0-1=0$，所以這個級數其實由 x^{-2} 開始：

$$\boxed{\mathrm{f}(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(2^{n-1}-1)x^{-n}=\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{7}{x^4}+\frac{15}{x^5}+\cdots \qquad (|x|>2).}$$

（兩個級數各自收斂，所以逐項合併是合理的。）無論寫成兩個級數的形式，還是合併後的形式，都是正確答案。

驗算

- 主導項。當 $|x|$ 很大時，$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}\approx\frac{1}{x^2}$，與最後一個展開式的首項吻合。$x^{-1}$ 的係數等於零並非巧合：兩個部分分式的 $\frac{1}{x}$ 項大小相等、符號相反。
- 代入一個值。當 $x=3$ 時，$\mathrm{f}(3)=\frac{1}{2\cdot1}=\frac{1}{2}$，而 $\sum_{n\geq2}(2^{n-1}-1)3^{-n}=\frac{1}{2}\sum_{n\geq2}(\frac{2}{3})^n-\sum_{n\geq2}(\frac{1}{3})^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$。同樣地，$\mathrm{f}(\frac{1}{2})=\frac{4}{3}$ 和 $\mathrm{f}(\frac{3}{2})=-4$ 亦與頭兩個展開式吻合。
- 數值上，在各自範圍內隨機選取數百個點（正負皆有），三個級數（各取 4000 項求和）與 f 的值都相符，誤差約為 10^{-14}。

常見錯誤

- 在 $\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x/2}$ 中弄錯正負號：提出來的因子是 -2，不是 2。
- 乘以 $\frac{1}{x}$ 之後，求和指標差了一：$\frac{1}{x}\sum_{n\geq0}x^{-n}$ 由 x^{-1} 開始，所以重新標記後的和由 $n=1$ 開始。
- 沒有檢查公比的模是否小於 1，就在每個範圍都使用同一個展開式。

STEP 之外

這三個展開式，是複分析（complex analysis）中洛朗級數（Laurent series）在實變數上的投影。對於複數 z，函數 $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $|z|<1$、$1<|z|<2$ 和 $|z|>2$ 這三個區域內各有不同的洛朗展開式：這三個區域是一個圓盤和兩個圓環（annulus），以通過極點（pole）的圓為邊界，而 $|x|=1$ 和 $|x|=2$ 在複平面上正好變成這些圓。這類展開式中 z^{-1} 的係數稱為留數（residue），原來它們決定了圍道積分（contour integral）的值。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）以優美的幾何方式講解了冪級數（power series）和洛朗級數。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。