詳細解答

STEP I 1988，第 9 題

純數學 • 代換積分法

STEP I 1988，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/88-s1-q9

關鍵思路

只要選對着手的部分，兩個積分都可以用標準技巧解決。在 (i) 中，$\ln x$ 與 x 的冪相乘，適合使用分部積分法（integration by parts）：對對數求導，對數便會消失。在 (ii) 中，棘手的是平方根，所以我們把它設為新變量。$\cos x\,\mathrm{d}x$ 正好是代換（substitution）所需要的，而餘下的是一個有理函數（rational function），可以用部分分式（partial fractions）處理。

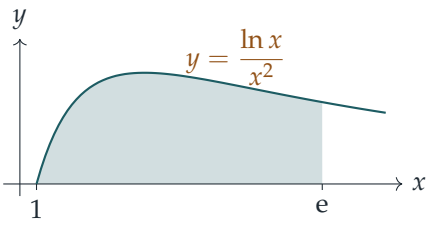
解答

第 (i) 部分

取 $u = \ln x$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x^2}$ 作分部積分，於是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$ 及 $v = -\dfrac{1}{x}$：

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{\mathrm{e}} - 0\right) + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

這裏用到 $\ln \mathrm{e} = 1$ 及 $\ln 1 = 0$。答案是正數，這是必然的：被積函數（integrand）在 $(1, \mathrm{e}]$ 上為正。



陰影部分的面積為 $1-2/\mathrm{e}\approx 0.264$。

第 (ii) 部分

被積函數在 $\sin x\neq 0$ 且 $1+\sin x>0$ 時有定義。設

$$u=\sqrt{1+\sin x},\qquad \text{於是}u^2=1+\sin x,\quad 2u\,\mathrm{d}u=\cos x\,\mathrm{d}x,\quad \sin x=u^2-1.$$

這裏 $u>0$，而且因為 $\sin x\neq 0$，所以 $u\neq 1$。於是

$$\int\frac{\cos x}{\sin x\sqrt{1+\sin x}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2u}{(u^2-1)\,u}\,\mathrm{d}u=\int\frac{2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u.$$

? **想一想** $\cos x$ 到哪裏去了？我們需要把它寫成 u 的式子嗎？

不需要。整個 $\cos x\,\mathrm{d}x$ 都由 $2u\,\mathrm{d}u$ 取代，這正是這個代換如此乾淨利落的原因。假如分子是別的東西，我們便要用到 $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$，還得應付隨之而來的種種正負號問題。

由部分分式得 $\dfrac{2}{u^2-1}=\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{1}{u+1}$，所以

$$\int\frac{2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u=\ln|u-1|-\ln|u+1|+C=\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C.$$

換回 x，

$$\int\frac{\cos x}{\sin x\sqrt{1+\sin x}}\,\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sqrt{1+\sin x}+1}\right|+C.$$

絕對值（modulus）符號不可省略：當 $-1<\sin x<0$ 時，我們有 $0<u<1$，而 $\dfrac{u-1}{u+1}$ 是負數。（嚴格來說，由於定義域被 $\sin x$ 的零點分割成多個區間，在被積函數有定義的每個區間上，常數可以各不相同。）

把分數的分子和分母同乘以 $u-1$，可得一個等價的形式。由於 $(u+1)(u-1)=u^2-1=\sin x$，答案亦可寫成

$$2\ln|\sqrt{1+\sin x}-1|-\ln|\sin x|+C.$$

驗算

- 用辛普森法則（Simpson's rule）得 $\int_1^{\mathrm{e}} x^{-2}\ln x\,\mathrm{d}x \approx 0.264241$，與 $1-2/\mathrm{e} = 0.264241\ldots$ 吻合。
- 對於 (ii)，把答案求導：由鏈式法則（chain rule），$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left|\dfrac{u-1}{u+1}\right| = \dfrac{2}{u^2-1}\cdot\dfrac{\cos x}{2u}$，這正是被積函數。數值上，用辛普森法則算得被積函數的 $\int_{0.3}^{1.2}$ 為 0.926006，與原函數（antiderivative）在兩端的差一致。在 $\sin x < 0$ 的區間上，結果同樣吻合，例如在 $[-1.2, -0.2]$ 上，積分為 -2.361027。

常見錯誤

- 在 (i) 中，反過來選取 $u = 1/x^2$ 及 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = \ln x$。這樣做原則上可行，但繁複得多；應該對對數求導。
- 在 (ii) 中，漏掉絕對值符號，以致答案在 $\sin x < 0$ 時沒有定義。
- 漏掉 $2u\,\mathrm{d}u$ 中的因子 2，令答案減半。

STEP 之外

第 (ii) 部分是一個一般原理的例子：若被積函數是 x 與 $\sqrt{ax+b}$ 的有理函數，經代換 $u = \sqrt{ax+b}$ 後便會變成 u 的有理函數，而有理函數總可以用部分分式來積分。這裏 $\sin x$ 扮演了 x 的角色。在大學一年級的分析（analysis）課程中，你會看到故事的另一面：那些為代換法和分部積分法提供依據的定理，以及積分常數（constant of integration）為何可以在定義域的各個分離區間上有所不同。Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）對這兩方面都有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。