詳細解答

STEP I 1988，第 8 題

純數學 • 三維幾何

STEP I 1988，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

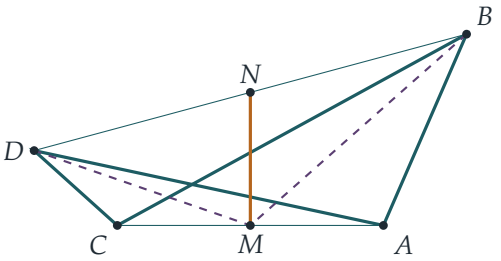
step.maths.org/questions/88-s1-q8

關鍵思路

每條對角線都把四邊形分成兩個三角形，而對邊相等令這兩個三角形全等（congruent）（SSS）。全等三角形的中線（median）相等，所以一條對角線的中點與另一條對角線的兩個端點等距。若某點與一條線段的兩個端點等距，把它與該線段的中點連起來，所得的直線便垂直於該線段：這其實就是等腰三角形（isosceles triangle）的性質。

解答

設 M 為 AC 的中點，N 為 BD 的中點。



上圖是一個空間四邊形（skew quadrilateral）的投影；虛線 MB 和 MD 是下文用到的中線，琥珀色的線段是 MN。

首先， $M \neq N$

只有當 M 和 N 是不同的點時，直線 MN 才有意義。假如 $M = N$，對角線 AC 和 BD 便會在一個公共點互相平分。過同一點的兩條直線位於同一平面上，所以 A、B、C、D

全都在該平面上，而 $ABCD$ 就會是一個（平面的）平行四邊形（parallelogram）。由於 $ABCD$ 是空間四邊形，故 $M \neq N$。「空間」這個條件正正用在這裏：平行四邊形的對邊相等，但兩個中點卻重合。

MN **垂直於** BD

考慮三角形 ABC 和 CDA，它們有公共的對角線 AC。我們有

$$AB = CD, \qquad BC = DA, \qquad CA = AC,$$

所以這兩個三角形全等（SSS），其中 $A \leftrightarrow C$、$B \leftrightarrow D$、$C \leftrightarrow A$。在這個對應之下，三角形 ABC 中由 B 到 AC 中點的中線，對應於三角形 CDA 中由 D 到 CA 中點的中線。兩條中線的另一端都是同一點 M，所以

$$MB = MD.$$

想一想 為甚麼全等三角形的中線必定相等？

中線完全由邊長決定。例如，根據餘弦定理（cosine rule）（或阿波羅尼奧斯定理（Apollonius's theorem）），三角形 ABC 中由 B 引出的中線 m 滿足 $4m^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2$。邊長相同，中線也就相同，所以 $MB^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2BC^2 - AC^2) = \frac{1}{4}(2CD^2 + 2DA^2 - CA^2) = MD^2$。

現在 M 與 B 和 D 等距，而 N 是 BD 的中點。三角形 MNB 和 MND 有 $MB = MD$、$NB = ND$，以及公共邊 MN，所以它們全等（SSS），而 $\angle MNB$ 與 $\angle MND$ 兩角相等。又因為 B、N、D 在同一直線上，這兩個角互補（supplementary）。所以兩者都是直角：$MN \perp BD$。（這兩個三角形是真正的三角形，並非退化（degenerate）：假如 M 在直線 BD 上而又有 $MB = MD$，M 便會是中點 N，而這個情況我們已經排除了。）

MN **垂直於** AC

把兩條對角線的角色對調，同樣的論證依然成立。三角形 ABD 和 CDB 有公共的對角線 BD，而且

$$AB = CD, \qquad AD = CB, \qquad BD = DB,$$

所以它們全等，其中 $A \leftrightarrow C$、$B \leftrightarrow D$、$D \leftrightarrow B$。由 A 和由 C 引出的中線，另一端都是 BD 的中點 N，所以 $NA = NC$。由於 M 是 AC 的中點，而且 $N \neq M$，由上文的等腰三角形論證可得 $MN \perp AC$。

因此，連接兩條對角線中點的直線垂直於每一條對角線，這正是所要證明的。

或者用向量

取 M 為原點，於是以位置向量（position vector）表示時有 $C = -A$，而 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$。把題目給出的兩個等式平方，

$$AB^2 = CD^2 \iff |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{d}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{d},$$
$$BC^2 = AD^2 \iff |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{d}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}.$$

兩式相減得 $4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -4\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}$，即 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{d}) = 0$。由於 $\overrightarrow{AC} = -2\mathbf{a}$，這就是說 $\overrightarrow{MN} \perp AC$。改為把原點放在 N，便可用同樣的方法得到 $MN \perp BD$。

驗算

試取 $A = (1,0,0)$、$B = (1,2,1)$、$C = (-1,0,0)$、$D = (-1,-2,1)$。這時 $AB = CD = \sqrt{5}$，$BC = AD = 3$，而且四點不共面（純量三重積（scalar triple product）$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})$ 等於 8）。這裏 $M = (0,0,0)$，$N = (0,0,1)$，所以 MN 沿着 z 軸，而 AC 沿着 x 軸，$\overrightarrow{BD} = (-2,-4,0)$ 則沒有 z 分量：兩者都垂直於 MN。我們還測試了 20 000 個對邊相等的隨機空間四邊形；MN 與任何一條對角線之間夾角的餘弦值，從未超過 4×10^{-12}。

常見錯誤

- 沒有解釋為甚麼 $M \neq N$。缺少了「空間四邊形」這個條件，結論便不成立，因為平行四邊形根本沒有直線 MN。
- 聲稱「根據對稱性」有 $MB = MD$，卻沒有指明是哪兩個全等三角形。
- 只證明了與其中一條對角線垂直。第二條需要用另一對全等三角形。

STEP 之外

在上面的例子中，繞 z 軸（即直線 MN）的半周旋轉（half-turn）把 A 與 C 互換，也把 B 與 D 互換。這在一般情況下也成立：每一個對邊相等的空間四邊形，繞 MN 旋轉 180° 後都會與自身重合。（這個旋轉固定 M，並把每一個垂直於 MN 的方向反轉，所以它把 A 送到 C；同樣地，它把 B 送到 D。）反過來說，有了這個半周旋轉，對邊相等便一目了然。把幾何事實看成某種對稱（symmetry）——即空間的一個等距變換（isometry）——的結果，是大學一年級幾何和羣論（group theory）的核心思想；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）闡述了羣論方面的內容，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題）則有更多 STEP 風格的幾何題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。