詳細解答

STEP I 1988，第 7 題

純數學 • 二次函數導數的界限

> **STEP I 1988，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q7

本題在 *Beyond STEP* 第 3.6 節斜率的界中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/markov-bound.html

關鍵思路

二次函數（quadratic）由它在三個點的取值完全確定，所以 f' 可以由 $f(1)$、$f(-1)$ 和 $f(0)$ 重新構造出來。一旦把 f' 寫成這個形式，假設 $|f| \leq 1$ 便控制了三個係數中的每一個，餘下的工作交給三角不等式（triangle inequality）就行了。至於最後一部分，我們考察 f 取哪些值時，證明中的每一個不等式都變成等式。

解答

$f'(x)$ 的恆等式

我們有 $f(1) = a+b+c$、$f(-1) = a-b+c$ 和 $f(0) = c$。把右邊按 x 的冪次整理：

$$\begin{aligned} &f(1)\left(x+\tfrac{1}{2}\right) + f(-1)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) - 2f(0)x \\ &\quad = \big[(a+b+c)+(a-b+c)-2c\big]x + \tfrac{1}{2}\big[(a+b+c)-(a-b+c)\big] \\ &\quad = 2ax + b. \end{aligned}$$

由於 $f'(x) = 2ax+b$，這就是所求的恆等式（identity）。

上界 $|f'(x)| \le 4$

假設只要 $|x| \le 1$，就有 $|f(x)| \le 1$。特別地，$|f(1)|$、$|f(-1)|$ 和 $|f(0)|$ 全都不超過 1。任取滿足 $|x| \le 1$ 的 x。由恆等式和三角不等式，

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\le |f(1)|\,\left|x+\tfrac{1}{2}\right| + |f(-1)|\,\left|x-\tfrac{1}{2}\right| + 2|f(0)|\,|x| \\ &\le \left|x+\tfrac{1}{2}\right| + \left|x-\tfrac{1}{2}\right| + 2|x|. \end{aligned}$$

> **想一想** 當 $|x| \le 1$ 時，$\left|x+\frac{1}{2}\right| + \left|x-\frac{1}{2}\right|$ 最大可以是多少？

這是 x 到 $\frac{1}{2}$ 和到 $-\frac{1}{2}$ 的距離之和。若 $|x| \le \frac{1}{2}$，則 x 位於這兩點之間，距離之和恰好是 1。若 $|x| > \frac{1}{2}$，兩點都在 x 的同一側，距離之和是 $2|x|$。無論哪種情況，當 $|x| \le 1$ 時它都不超過 2。另外 $2|x| \le 2$，所以

$$|f'(x)| \le 2 + 2 = 4 \qquad \text{對於} |x| \le 1,$$

這正是要證明的結果。

（另一個看法：f' 是線性的，所以在 $[-1,1]$ 上它的絕對值（modulus）在端點處最大，而在 $x = \pm 1$ 處的上界是 $|f'(\pm 1)| \le \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 4$。）

等式成立的一個例子

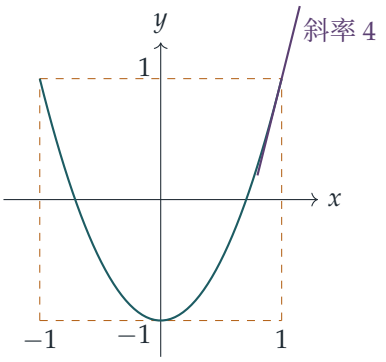
要在 $x = 1$ 處取得等式，上面的每一步在該處都必須恰好取等。在 $x = 1$ 處，係數 $x+\frac{1}{2}$、$x-\frac{1}{2}$ 和 $-2x$ 分別是 $\frac{3}{2}$、$\frac{1}{2}$ 和 -2。因此，要得到 $f'(1) = +4$，我們希望

$$f(1) = 1, \qquad f(-1) = 1, \qquad f(0) = -1.$$

由此得 $c = -1$、$a + b + c = 1$ 和 $a - b + c = 1$，所以 $b = 0$ 而 $a = 2$：

$$a = 2, \quad b = 0, \quad c = -1, \qquad f(x) = 2x^2 - 1.$$

現在檢查條件。對於 $|x| \le 1$，我們有 $0 \le x^2 \le 1$，所以 $-1 \le 2x^2 - 1 \le 1$，即 $|f(x)| \le 1$。而 $f'(x) = 4x$，所以 $f'(1) = 4$，且 $x = 1$ 在區間之內。這就是我們需要的例子。



曲線 $y = 2x^2 - 1$（藍綠色）始終留在正方形 $|x| \le 1$、$|y| \le 1$ 之內，由頂邊盪到底邊再盪回頂邊，因此它在兩端達到了可能的最大陡峭程度。

（$\pm(2x^2-1)$ 中任何一個都給出 $|\mathrm{f}'(\pm 1)| = 4$。選取 $\mathrm{f}(x) = 2x^2 - 1$ 會得到 $\mathrm{f}'(1) = +4$，而 $-(2x^2-1)$ 在 $x = -1$ 處也是如此。）

驗算

- 試用 $\mathrm{f}(x) = x^2 + x + 1$：$\mathrm{f}(1) = 3$、$\mathrm{f}(-1) = 1$、$\mathrm{f}(0) = 1$。在 $x = 2$ 處，恆等式給出 $3 \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot 2 = 5 = \mathrm{f}'(2)$。
- 對 20,000 個二次函數作隨機搜尋，每個都經縮放使得 $\max_{|x|\le 1} |\mathrm{f}(x)| = 1$，結果從未發現 $\max_{|x|\le 1} |\mathrm{f}'(x)| = 2|a| + |b|$ 超過 4（最大的約為 3.91），而 $2x^2 - 1$ 則恰好達到 4。

常見錯誤

- 把 $\left|x + \frac{1}{2}\right|$ 和 $\left|x - \frac{1}{2}\right|$ 分開估計，各以 $\frac{3}{2}$ 為上界。這樣只能得到 $|\mathrm{f}'(x)| \le 5$。這兩個距離必須合起來一併估計。
- 提出例子後，只在 0 和 ± 1 處檢查，而沒有在整個區間上驗證 $|\mathrm{f}(x)| \le 1$。

STEP 之外

這是馬爾可夫不等式（Markov's inequality）在二次情況下的特例：若 n 次多項式（polynomial）p 在 $[-1, 1]$ 上滿足 $|p| \le 1$，則在該區間上 $|p'| \le n^2$。等式由切比雪夫多項式（Chebyshev polynomial）$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ 取得，而 $2x^2 - 1 = T_2(x)$。利用多項式在選定點上的取值來把它寫出，就是拉格朗日插值法（Lagrange interpolation），它是數值分析（numerical analysis）和逼近理論（approximation theory）的基本工具。想做更多同類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。