詳細解答

STEP I 1988，第 6 題

純數學 • 複數與幾何

> **STEP I 1988，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q6

關鍵思路

在阿根圖（Argand diagram）上，向量 $\overrightarrow{P_jP_k}$ 就是複數（complex number）$z_k - z_j$，所以向量相等變成差相等，而垂直（perpendicular）則變成「一個差除以另一個差所得的商是純虛數（purely imaginary）」。把題目給定的數值代入後，條件 (i) 會以 z 表示出 z_4 和 w，而條件 (ii) 則決定了 z 的虛部（imaginary part）。這時會發現六邊形關於其中心對稱，凸性（convexity）和最後的角度因而都容易處理。

解答

把題目的陳述翻譯成代數

由於 $\overrightarrow{P_jP_k}$ 由 $z_k - z_j$ 表示，陳述 (i) 即是說

$$z_2 - z_1 = z_4 - z_5 \qquad 及 \qquad z_3 - z_2 = z_5 - z_6.$$

至於 (ii)，兩個非零向量 u 和 v 互相垂直，當且僅當它們的輻角（argument）相差 $\pm\frac{\pi}{2}$，亦即 u/v 是純虛數。各點互不相同，所以 $z_4 - z_2 \neq 0$ 及 $z_6 - z_3 \neq 0$，而陳述 (ii) 即是說

$$\frac{z_4 - z_2}{z_6 - z_3} \text{ 是純虛數，} \qquad 等價於 \qquad \operatorname{Re}\left[(z_4 - z_2)\,\overline{(z_6 - z_3)}\right] = 0.$$

(i) 的推論

把 (i) 的兩條等式相加，z_2 和 z_5 兩項互相抵消：

$$z_3 - z_1 = z_4 - z_6, \qquad 所以 \qquad z_4 - z_3 = z_6 - z_1,$$

這正是 $\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_1P_6}$，即所要證明的結果。

六邊形

現在設 $z_1 = 0$、$z_2 = 1$、$z_3 = z$、$z_5 = \mathrm{i}$ 及 $z_6 = w$。由 (i) 的第一條等式得

$$z_4 = z_5 + z_2 - z_1 = 1 + \mathrm{i},$$

而由第二條等式得 $z - 1 = \mathrm{i} - w$，所以

$$w = 1 + \mathrm{i} - z.$$

留意 $z_1 + z_4 = z_2 + z_5 = z_3 + z_6 = 1 + \mathrm{i}$：相對的頂點關於點 $\frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})$ 對稱，所以這個六邊形有對稱中心（centre of symmetry）。

至於 (ii)，$z_4 - z_2 = \mathrm{i}$，而 $z_6 - z_3 = w - z = 1 + \mathrm{i} - 2z$。商 $\mathrm{i}/(1 + \mathrm{i} - 2z)$ 是純虛數，當且僅當 $1 + \mathrm{i} - 2z$ 是實數，亦即 $1 - 2\,\mathrm{Im}(z) = 0$。所以

$$\mathrm{Im}(z) = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{於是} \qquad \mathrm{Im}(w) = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

設 $z = a + \frac{1}{2}\mathrm{i}$，其中 a 為實數。那麼 $w = (1 - a) + \frac{1}{2}\mathrm{i}$，所以 $\mathrm{Re}(w) = 1 - \mathrm{Re}(z)$ 恆成立。六個頂點是

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (a, \tfrac{1}{2}), \quad (1, 1), \quad (0, 1), \quad (1 - a, \tfrac{1}{2}) :$$

即單位正方形在兩條垂直邊的半高處各加上一個「尖角」。

想一想 怎樣才可以不靠圖形來檢驗凸性？

順着次序沿六邊形走一圈。六邊形是凸的，當且僅當我們在每個頂點都向同一方向轉彎。在某個頂點的轉向，可用進入該頂點的邊 u 與離開該頂點的邊 v 的叉積（cross product）$\mathrm{Im}(\bar{u}v) = u_x v_y - u_y v_x$ 的正負號來量度。各邊是

$$P_1P_2 = (1, 0), \quad P_2P_3 = (a - 1, \tfrac{1}{2}), \quad P_3P_4 = (1 - a, \tfrac{1}{2}),$$
$$P_4P_5 = (-1, 0), \quad P_5P_6 = (1 - a, -\tfrac{1}{2}), \quad P_6P_1 = (a - 1, -\tfrac{1}{2}),$$

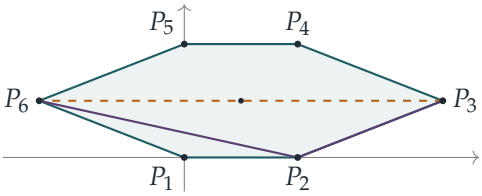
而在 $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_1$ 的叉積依次為

$$\tfrac{1}{2}, \qquad a - 1, \qquad \tfrac{1}{2}, \qquad \tfrac{1}{2}, \qquad a - 1, \qquad \tfrac{1}{2}.$$

無論 a 取甚麼值，其中四個都是正數，所以六邊形是凸的，當且僅當 $a - 1 > 0$。（若 $a = 1$，則 P_3 位於線段 P_2P_4 上，得不到真正的六邊形。）從幾何上看，P_3 必須位於正方形的邊 $x = 1$ 的右方，而根據對稱性，P_6 必須位於 $x = 0$ 的左方。所以條件是

$$\boxed{\mathrm{Re}(z) > 1 \quad \text{及} \quad \mathrm{Re}(w) = 1 - \mathrm{Re}(z) \ \ (\text{所以} \mathrm{Re}(w) < 0)}$$

（連同 $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w) = \frac{1}{2}$，這已由 (ii) 所決定）。



距離 P_3P_6

在 P_2 處，角的兩臂是

$$z_3 - z_2 = (a-1) + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}, \qquad z_6 - z_2 = -a + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}.$$

對於角 $\theta = \angle P_3P_2P_6$（介乎 0 與 π 之間），兩臂的點積（dot product）給出 $|P_2P_3|\,|P_2P_6|\cos\theta$，而叉積的大小給出 $|P_2P_3|\,|P_2P_6|\sin\theta$：

$$\text{點積} = -a(a-1) + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}(1 + 4a - 4a^2), \qquad \text{叉積} = (a-1)\cdot\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot(-a) = \tfrac{1}{2}(2a-1).$$

當 $a > 1$ 時叉積為正數，所以它正好就是含 $\sin\theta$ 的那一項，於是

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}(2a-1)}{\frac{1}{4}(1+4a-4a^2)} = \frac{2(2a-1)}{1+4a-4a^2}.$$

令它等於 $-\frac{2}{3}$：

$$3(2a-1) = -(1+4a-4a^2) \quad\Longrightarrow\quad 4a^2 - 10a + 2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad 2a^2 - 5a + 1 = 0,$$

所以 $a = \frac{1}{4}(5 \pm \sqrt{17})$。取負號得 $a \approx 0.22$，不符合凸性條件 $a > 1$；取正號得 $a \approx 2.28 > 1$。（這時分母 $1 + 4a - 4a^2$ 是負數，所以 θ 是鈍角，正切為負數時正應如此。）

最後，P_3 和 P_6 的虛部相同，所以

$$P_3P_6 = |z - w| = |2a - 1| = 2a - 1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2} - 1 = \boxed{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} \approx 3.56.$$

如果不要求六邊形是凸的，用同樣的方法（這時分子要改為 $|2a-1|$）會多得一個解 $a = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{17})$。這只是鏡像 $a \mapsto 1 - a$，它把 z 和 w 互換，所得的距離同樣是 $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{17})$。

驗算

- 對稱性：$z_1 + z_4 = z_2 + z_5 = z_3 + z_6$，所以結果 $\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_1P_6}$ 不過是中心對稱六邊形的第三對對邊。

- 取 $a = \frac{1}{4}(5+\sqrt{17}) \approx 2.2808$，直接計算 $\arg\big((z_6 - z_2)/(z_3 - z_2)\big)$，所得的角的正切是 -0.66667，而 $|z - w| \approx 3.5616 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$。
- 對由 -5 至 5 的 a 以數值方法檢驗凸性，確認六邊形是凸的當且僅當 $a > 1$。

常見錯誤

- 弄錯向量的方向：$\overrightarrow{P_5P_4}$ 是 $z_4 - z_5$，而不是 $z_5 - z_4$。
- 把垂直寫成「斜率之積為 -1」，結果遺漏了鉛垂的情況。這裏 $\overrightarrow{P_2P_4}$ 是鉛垂的，而用商來檢驗就能乾淨利落地處理這種情況。
- 保留了根 $a = \frac{1}{4}(5-\sqrt{17})$，但它並不給出凸六邊形（事實上這時 $\tan\theta > 0$）。

STEP 之外

把點看成複數，幾何就變成代數：平移是加法，旋轉和縮放是乘法。「u/v 是純虛數」這個檢驗，正是角度化為輻角的一個例子。以叉積的正負號檢驗凸性，是計算幾何（computational geometry）中標準凸包（convex hull）演算法的基礎。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）把這種以幾何看待複數的觀點發揮得淋漓盡致。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。