詳細解答

STEP I 1988，第 5 題

純數學 • 級數與生成函數

> **STEP I 1988，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q5

關鍵思路

把每個因式展開成等比級數（geometric series）（即指數為 -1 的二項式定理（binomial theorem）），然後相乘：c_m 就是一個有限等比級數之和，有簡潔的閉合形式（closed form）。只要把 c_m^2 寫成 $(a^2)^m$、$(ab)^m$ 和 $(b^2)^m$ 這三個純冪的組合，最後的級數便會分拆成三個等比級數。餘下的工作，就是小心處理分式的代數運算，並留意每個級數在哪裏收斂（converge）。

解答

求 c_m

根據指數為 -1 的二項式定理，

$$(1-ax)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k \quad (|ax|<1), \qquad (1-bx)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} b^j x^j \quad (|bx|<1).$$

由於 $0<a<b$，條件 $b|x|<1$ 給出 $a|x|<b|x|<1$，所以兩個展開式都成立。兩個級數都絕對收斂（converge absolutely），因此我們可以把它們相乘，再按 x 的冪次合併各項。x^m 的係數來自滿足 $k+j=m$ 的各對指數：

$$c_m = \sum_{k=0}^{m} a^k b^{m-k} = b^m + ab^{m-1} + \cdots + a^{m-1}b + a^m.$$

這是一個等比級數，首項為 b^m，公比為 a/b，共有 $m+1$ 項。由於 $a \neq b$，它的和是

$$c_m = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{b-a}.$$

（等價地，$(b-a)c_m = b^{m+1} - a^{m+1}$，因為把乘積展開後，各項會逐一相消（telescope）。）

c_m^2 的公式

兩邊平方，並利用 $(b-a)^2=(a-b)^2$，得

$$c_m^2=\frac{(b^{m+1}-a^{m+1})^2}{(b-a)^2}=\frac{a^{2m+2}-2(ab)^{m+1}+b^{2m+2}}{(a-b)^2},$$

這正是所要求的結果。

級數 $\sum c_m^2 x^m$

上一條公式的要點，在於每一項都是一個常數乘以一個 m 次冪：

$$c_m^2x^m=\frac{1}{(a-b)^2}\Big(a^2\,(a^2x)^m-2ab\,(abx)^m+b^2\,(b^2x)^m\Big).$$

所以 $\sum c_m^2x^m$ 是三個等比級數的組合，公比分別為 a^2x、abx 和 b^2x。

想一想 對哪些 x，這三個等比級數全部收斂？

我們需要 $|a^2x|<1$、$|abx|<1$ 和 $|b^2x|<1$。由於 $0<a^2<ab<b^2$，最後一個條件最強，並且蘊涵另外兩個。所以三個級數全部收斂，當且僅當 $|x|<1/b^2$。這時把每個等比級數求和，得

$$\sum_{m=0}^{\infty}c_m^2x^m=\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{1-a^2x}-\frac{2ab}{1-abx}+\frac{b^2}{1-b^2x}\right).$$

把所有項通分，公分母為 $(1-abx)(1-a^2x)(1-b^2x)$。分子是

$$N=a^2(1-abx)(1-b^2x)-2ab(1-a^2x)(1-b^2x)+b^2(1-a^2x)(1-abx).$$

我們按 x 的冪次整理：

$$\begin{aligned}
\text{常數項：}\quad & a^2-2ab+b^2=(a-b)^2,\\
\text{係數，對應}x\text{：}\quad & -a^2(ab+b^2)+2ab(a^2+b^2)-b^2(a^2+ab)\\
& \qquad =a^3b-2a^2b^2+ab^3=ab(a-b)^2,\\
\text{係數，對應}x^2\text{：}\quad & a^2\cdot ab^3-2ab\cdot a^2b^2+b^2\cdot a^3b=0.
\end{aligned}$$

所以 $N=(a-b)^2(1+abx)$。因式 $(a-b)^2$ 可以約去，餘下

$$c_0^2+c_1^2x+c_2^2x^2+\cdots=\frac{1+abx}{(1-abx)(1-a^2x)(1-b^2x)}\qquad\text{適用於}-\frac{1}{b^2}<x<\frac{1}{b^2}.$$

這個區間不能再擴大。在 $x=\pm1/b^2$ 處，各項滿足

$$|c_m^2x^m|=\frac{(b^{m+1}-a^{m+1})^2}{(b-a)^2\,b^{2m}}=\frac{b^2(1-(a/b)^{m+1})^2}{(b-a)^2}\to\frac{b^2}{(b-a)^2}\neq 0,$$

所以級數在該處發散（diverge）；當 $|x|>1/b^2$ 時級數同樣發散，因為這時各項會無限增大。

驗算

取 $a = 1$，$b = 2$。這時 $c_m = 2^{m+1} - 1$，所以 $c_0, c_1, c_2 = 1, 3, 7$，而直接計算可得 $\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = (1 + x + x^2 + \ldots)(1 + 2x + 4x^2 + \ldots) = 1 + 3x + 7x^2 + \cdots$。它們的平方是 $1, 9, 49$。另一方面，$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-4x)} = 1 + 7x + 35x^2 + \cdots$，再乘以 $1 + 2x$ 便得到 $1 + 9x + 49x^2 + \cdots$，與預期相符。數值上，取 $a = 0.7$、$b = 1.3$ 和 $x = 0.3$，把 $c_m^2 x^m$ 加至很多項，得 $4.163878\ldots$，與閉合形式的值吻合。

常見錯誤

- 把區間寫成 $b|x| < 1$，即照抄第一部分的條件。新級數的公比是 a^2x、abx、b^2x，所以條件應為 $b^2|x| < 1$。
- 讓 c_m 停留在求和的形式。閉合形式 $(b^{m+1} - a^{m+1})/(b - a)$ 正是令題目餘下部分得以完成的關鍵。
- 在 N 中 x 的係數出現正負號錯誤。老老實實地把每個乘積逐項展開，比嘗試取巧更快。

STEP 之外

級數 $\sum c_m x^m$ 是數列 c_m 的*生成函數*（*generating function*），而這道題說明：如果一個數列有有理的生成函數，那麼由它各項的平方組成的數列也是如此。這是兩個有理冪級數的*阿達馬乘積*（*Hadamard product*）的一個特例，而這種乘積必定是有理的。這裏求得的區間是*收斂半徑*（*radius of convergence*）的一個例子：有理函數的冪級數（power series）一直收斂到最近的極點（pole）為止，在這裏就是 $x = 1/b^2$。關於生成函數，Wilf 的 *generatingfunctionology* 有十分精彩的闡述；至於冪級數及其收斂性，Abbott 的 *Understanding Analysis* 有嚴謹細緻的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。