詳細解答

STEP I 1988，第 4 題

純數學 • 直線交點的計數

> **STEP I 1988，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q4

關鍵思路

不要試圖一次過想像所有線段。不如改問：兩條線段（segment）何時會相交？答案只取決於它們的端點（endpoint）在兩條軸上的排列次序，而每一個交叉點因此都對應於在每條軸上各選兩點。只要能數出單獨一條線段上的交叉點，那些極端的線段以及最後的平均值，只需小心點算便可得出。

解答

把 y 軸上的點按與原點 O 的距離由小至大依次記為 $B_1, \ldots, B_m$，x 軸上的點亦同樣記為 $A_1, \ldots, A_n$。以 s_{ij} 表示線段 B_iA_j。

第 (i) 部分

m 個點 B_i 中的每一個都與 n 個點 A_j 中的每一個相連，所以共有

$$mn$$

條線段。

第 (ii) 部分

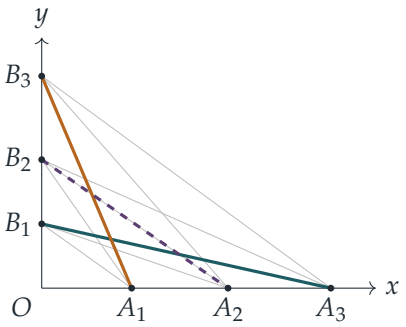
取兩條不同的線段 s_{ij} 和 s_{kl}。

- 若 $i = k$ 或 $j = l$，它們有一個公共端點。由同一點出發的兩條相異線段只會在該點相遇，而這類相遇點不計算在內。
- 若 $i < k$ 且 $j < l$，則 B_i 和 A_j 都與 O 位於直線 B_kA_l 的同一側（它們在三角形 OB_kA_l

的兩條邊 OB_k 和 OA_l 上，而不在 B_k 或 A_l 處）。若一條線段的兩個端點都嚴格位於某直線的同一側，整條線段便留在該側，所以 s_{ij} 永不與 s_{kl} 相遇：它「嵌套」在下方。

- 若 $i < k$ 且 $j > l$，則 B_i 與 O 位於直線 B_kA_l 的同一側，而 A_j 在另一側。所以 s_{ij} 穿過該直線。同理，A_l 位於直線 B_iA_j 靠 O 的一側，而 B_k 在另一側。每條線段都把另一條線段的兩個端點分隔開，所以這兩條線段恰好交於一點，而該點並非端點。

$i > k$ 的情況相同，只是角色互換。



在圖中（$m = n = 3$），藍綠色的 s_{13} 與琥珀色的 s_{31} 的端點次序相反，所以它們相交。虛線 s_{22} 亦與它們各自相交。

因此，每一對交於內點的線段，都來自選取兩點 B_i, B_k（$i < k$）和兩點 A_j, A_l（$j < l$），然後取 s_{il} 和 s_{kj}。反過來，每一個這樣的選擇都恰好給出一對相交的線段。由於沒有三條線段通過同一個內點，不同的線段對給出不同的點。因此交點（point of intersection）的數目為

$$\binom{m}{2}\binom{n}{2} = \frac{m(m-1)n(n-1)}{4}.$$

平均值

一條線段上的交叉點。根據上述法則，s_{ij} 與 s_{kl} 相交，當且僅當 $k < i,\ l > j$ 或 $k > i,\ l < j$。所以 s_{ij} 上的交點數目為

$$c_{ij} = (i-1)(n-j) + (m-i)(j-1).$$

當 $m = n$ 時的極端線段。設 $N = n-1$，$a = i-1$，$b = j-1$，則 $0 \le a, b \le N$，且

$$c_{ij} = a(N-b) + (N-a)b = N(a+b) - 2ab = \tfrac{1}{2}\big(N^2 - (N-2a)(N-2b)\big),$$

這可以展開驗證。由於 $|N-2a| \le N$ 及 $|N-2b| \le N$，乘積 $(N-2a)(N-2b)$ 介乎 $-N^2$ 與 N^2 之間。因此 $0 \le c_{ij} \le N^2$，並且：

- $c_{ij} = N^2$ 僅當 $(N-2a)(N-2b) = -N^2$，即 $\{a,b\} = \{0,N\}$。這就是 s_{1n} 和 s_{n1} 兩條線段。
- $c_{ij} = 0$ 僅當 $(N-2a)(N-2b) = N^2$，即 $a = b = 0$ 或 $a = b = N$。這就是 s_{11} 和 s_{nn} 兩條線段。

（這裏 $N \geq 2$，所以四條線段互不相同。）所以恰好有兩條線段上的點數最多，為 $(n-1)^2$，亦恰好有兩條線段上的點數最少，為 0。移除它們後，剩下 $n^2 - 4$ 條線段。

想一想 究竟是對甚麼取平均？

我們數的是移除那四條線段之後仍然存在的交點，即兩條剩餘線段之間的交叉點，每點只數一次。然後除以剩餘線段的數目。（如果你改為把每條剩餘線段上的交叉點加起來，每個點都會被數兩次，而且一些已失去的點仍會被計入。這樣會得出 $\frac{1}{2}(n-1)^2$，並非題目所給的答案。見「常見錯誤」。）

失去的點。線段 s_{11} 和 s_{nn} 上沒有交點，所以移除它們不會失去任何點。線段 s_{1n} 和 s_{n1} 上各有 $(n-1)^2$ 個點。它們互相相交（$1 < n$ 且 $n > 1$），所以恰好有一點同時位於兩者之上。根據容斥原理（inclusion–exclusion），失去的點數為 $2(n-1)^2 - 1$。

剩餘的點。由第 (ii) 部分取 $m = n$，剩餘的點數為

$$\begin{aligned}\frac{n^2(n-1)^2}{4} - 2(n-1)^2 + 1 &= \frac{(n-1)^2(n^2-8)+4}{4} \\ &= \frac{n^4 - 2n^3 - 7n^2 + 16n - 4}{4} \\ &= \frac{(n-2)(n^3 - 7n + 2)}{4}.\end{aligned}$$

至於因式分解（factorisation），注意 $n = 2$ 時該四次多項式為 $16 - 16 - 28 + 32 - 4 = 0$，所以 $n - 2$ 是一個因式。把 $(n-2)(n^3 - 7n + 2) = n^4 - 2n^3 - 7n^2 + 16n - 4$ 乘開即可確認。

平均值。除以剩餘的 $n^2 - 4 = (n-2)(n+2)$ 條線段，並約去 $n - 2 \neq 0$（因為 $n \geq 3$），得平均值為

$$\frac{(n-2)(n^3 - 7n + 2)}{4(n-2)(n+2)} = \frac{n^3 - 7n + 2}{4(n+2)},$$

正如所求。

驗算

當 $n = 3$ 時，公式給出 $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$。直接計算：移除 $s_{11}, s_{33}, s_{13}, s_{31}$ 後，剩下 $s_{12}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{32}$。其中只有 s_{12} 與 s_{21}，以及 s_{23} 與 s_{32}，端點次序相反，所以 5 條線段上共有 2 個點，得出

$\frac{2}{5}$。我們亦用電腦驗算：在兩條軸上隨機放置點，以精確算術找出每一個交叉點，確認了 mn、$\binom{m}{2}\binom{n}{2}$ 和 c_{ij}。此外亦確認了平均值公式對 3 至 29 的每一個 n 都成立。

常見錯誤

- 把每條剩餘線段上的交叉點加起來。每個點都位於兩條線段上，所以這樣會重複計算，而且仍然包括了與被移除線段共有的點。結果是 $\frac{1}{2}(n-1)^2$，而非題目所給的公式。
- 忘記 s_{1n} 和 s_{n1} 互相相交，因而減去 $2(n-1)^2$ 而非 $2(n-1)^2-1$。
- 把交叉點數成 $\binom{mn}{2}$ 對線段：大部分線段對不是共用一個端點，就是互相嵌套，根本不會相交。

STEP 之外

本題的核心是一個雙射（bijection）：交叉點與在每條軸上各選兩點的方法一一對應。這是組合數學（combinatorics）的基本工具。同一幅圖亦出現於完全二部圖（complete bipartite graph）$K_{m,n}$ 的「交叉數」（crossing number）之中。Zarankiewicz 的畫法（正是這一種，只是每條軸的兩側都有點）用了 $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ 個交叉點，而這是否總是最少的可能數目，至今仍是未解決的問題（open problem）。想多做以雙射計數的題目，可看 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至於圖論（graph theory），可看 Wilson 的 *Introduction to Graph Theory*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。