詳細解答

STEP I 1988，第 3 題

純數學 • 幾何極值的界限

> **STEP I 1988，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q3

關鍵思路

先問一個問題：正方形內的一點若離 O 很遠，它可以在哪裏？它必定被擠進對角附近的一小塊區域。如果 P 和 Q 都離 O 很遠，兩點便同在這一小塊區域內，因此彼此相距很近。$\sqrt{6}-\sqrt{2}$ 這個數的大小恰好令這個論證成立，而它來自一個對稱地放在正方形內的等邊三角形（equilateral triangle）。

解答

以厘米為單位，取 O 為原點，正方形為 $0 \le x \le 1$、$0 \le y \le 1$。記

$$s = \sqrt{6}-\sqrt{2}, \qquad s^2 = 6+2-2\sqrt{12} = 8-4\sqrt{3} \approx 1.072,$$

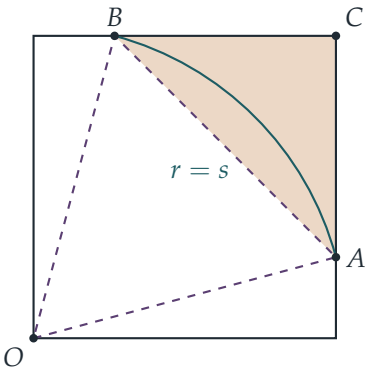
並設 $t = 2-\sqrt{3} \approx 0.268$。定義以下各點：

$$A = (1,t), \qquad B = (t,1), \qquad C = (1,1).$$

於是

$$\begin{aligned} OA^2 = OB^2 &= 1+(2-\sqrt{3})^2 = 8-4\sqrt{3} = s^2, \\ AB^2 &= 2(1-t)^2 = 2(\sqrt{3}-1)^2 = 8-4\sqrt{3} = s^2, \\ AC = BC &= 1-t = \sqrt{3}-1 \approx 0.732 < s. \end{aligned}$$

所以 OAB 是正方形內一個邊長為 s 的等邊三角形。



藍綠色的弧是以 O 為圓心、半徑為 s 的圓；正方形在這條弧以外的部分，全在塗上陰影的三角形 ABC 之內。

第 1 步：離 O 遠的點都在三角形 ABC 內

直線 AB 的方程是 $x+y=1+t$。考慮正方形在這條直線靠 O 一側的部分，即 $\{x+y\le 1+t\}$。這是一個五邊形，頂點為

$$O=(0,0),\quad (1,0),\quad A,\quad B,\quad (0,1).$$

函數 x^2+y^2 是凸函數（convex function），所以它在這個凸五邊形上的最大值必在某個頂點取得。它在各頂點的值依次是 0、1、s^2、s^2、1，其中最大的是 s^2。因此，對正方形內的每一點，

$$x+y\le 1+t \implies x^2+y^2\le s^2$$

都成立。反過來說：如果正方形內的一點 (x,y) 與 O 的距離大於 s，則 $x+y>1+t$；又因為 $x\le 1$ 及 $y\le 1$，這一點必在三角形 ABC 內。

想一想 為甚麼三角形內兩點之間的最大距離，必定是它其中一條邊的長度？

固定 Q。距離 $|PQ|$ 是 P 的凸函數，所以在三角形上，當 P 是頂點時它取得最大值。現在固定這個頂點，讓 Q 變動：根據同樣的論證，Q 也可以取為頂點。因此，三角形內兩點之間的最大距離就是某兩個頂點之間的距離，也就是它最長的邊。

第 2 步：導出矛盾

假設 $OP>s$ 而且 $OQ>s$；否則結論已經成立。根據第 1 步，P 和 Q 都在三角形 ABC 內。這個三角形最長的邊是 $AB=s$（另外兩邊的長度是 $\sqrt{3}-1<s$）。所以根據上面方框內的結果，

$$PQ\le s.$$

由此可見，無論在哪一種情況，OP、PQ、QO 之中至少有一個不超過 $s = (\sqrt{6} - \sqrt{2})$ 厘米，這正是要證明的結論。

這個界已是最佳

取 $P = A$ 及 $Q = B$，便恰好有 $OP = PQ = QO = s$，所以任何更小的數都不行。由於 $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，我們有 $s = \sec 15^\circ$：極端情況的三角形就是關於對角線對稱放置的等邊三角形，其中 OA 和 OB 各與正方形的一條邊成 15° 角。

驗算

- $s \approx 1.0353$，比正方形的邊長稍大，又遠小於對角線的長度 $\sqrt{2} \approx 1.414$，這是合理的。
- 數值上，在正方形內隨機抽取 10^6 對 P, Q，$\min(OP, PQ, QO)$ 從未超過 s（最大的約為 1.0235）。以爬山法（hill-climbing）搜尋這個最小值的最大可能值，結果收斂到 $P \approx (1, 0.26795)$、$Q \approx (0.26795, 1)$，其值為 1.035276，與 A、B 和 s 吻合。

常見錯誤

- 只論證了當 $OP, OQ > s$ 時 $\angle POQ < 60^\circ$。這是對的，但單憑這一點並不能令 PQ 成為最短的邊，所以若不再多下工夫，證明仍未完成。
- 只檢查對稱的情況。這只說明這個界不能再改進；它並沒有證明這個界對所有 P 和 Q 都成立。

STEP 之外

這是一道關於點的裝填的小型極值問題（extremal problem）：一個區域內的三點，可以同時彼此相距多遠？這類問題會引向裝填（packing）與覆蓋（covering）問題，也引向集合的*直徑*（diameter）這個概念：一個集合的直徑與它的凸包（convex hull）的直徑相同。正是這個事實令第 2 步變得輕而易舉。想做更多同類問題，可參看 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。