詳細解答

STEP I 1988，第 2 題

純數學 • 駐點

> **STEP I 1988，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q2

關鍵思路

把 g 看成一個複合函數（composition）：$\mathrm{g} = h \circ \mathrm{f}$，其中 $h(t) = t + 1/t$。由鏈式法則（chain rule）可知，g' 只會在 $\mathrm{f}' = 0$ 或 $h'(\mathrm{f}) = 0$ 之處為零，而後者即 $\mathrm{f} = \pm 1$。把 $\cos 2x$ 用 $\sin x$ 表示，f 便成為 $\sin x$ 的二次式（quadratic），其大小和形狀由此一目了然。

解答

導數

用鏈式法則對 $\mathrm{g} = \mathrm{f} + \mathrm{f}^{-1}$ 求導，

$$\mathrm{g}'(x) = \mathrm{f}'(x) - \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)^2} = \mathrm{f}'(x)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{f}(x)^2}\right).$$

再用積法則（product rule）求導一次，並利用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\mathrm{f}^{-2}) = 2\mathrm{f}^{-3}\mathrm{f}'$，

$$\mathrm{g}''(x) = \mathrm{f}''(x)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{f}(x)^2}\right) + \frac{2\,\mathrm{f}'(x)^2}{\mathrm{f}(x)^3}.$$

f 的大小

利用 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$，並設 $s = \sin x$，

$$\mathrm{f}(x) = 5 + 2s - 2s^2 = \tfrac{11}{2} - 2\left(s - \tfrac{1}{2}\right)^2.$$

當 s 取遍 $[-1,1]$ 時，此式在 $s=\frac{1}{2}$ 處最大（為 $\frac{11}{2}$），而在區間中離 $\frac{1}{2}$ 最遠的端點，即 $s=-1$ 處最小，其值為 1。因此

$$1 \le \mathrm{f}(x) \le \tfrac{11}{2} \quad \text{對所有} x,$$

而且只有當 $\sin x=-1$ 時才有 $\mathrm{f}(x)=1$。特別地，f 永不為零，所以 g 處處有定義。

駐點

$\mathrm{g}'(x)=0$ 當且僅當 $\mathrm{f}'(x)=0$ 或 $\mathrm{f}(x)^2=1$；滿足此條件的點就是駐點(stationary point)。

f′ 的零點。我們有

$$\mathrm{f}'(x) = -2\sin 2x + 2\cos x = 2\cos x\,(1-2\sin x),$$

它在 $\cos x=0$ 或 $\sin x=\frac{1}{2}$ 時為零；在 $[0,2\pi]$ 內即

$$x = \tfrac{\pi}{6},\ \tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{5\pi}{6},\ \tfrac{3\pi}{2}.$$

$\mathrm{f}=\pm 1$ 的點。由於 $\mathrm{f}\ge 1$，這即是 $\mathrm{f}=1$，亦即 $\sin x=-1$，亦即 $x=\frac{3\pi}{2}$，而這一點已在上面的列表之中。

所以 g 在 $[0,2\pi]$ 內恰好有四個駐點。(兩個端點不在其中：$\mathrm{g}'(0)=\mathrm{g}'(2\pi)=2\cdot\frac{24}{25}\neq 0$。)

駐點的分類

我們有 $\mathrm{f}''(x)=-4\cos 2x-2\sin x$。在每一個駐點都有 $\mathrm{f}'=0$，所以 g'' 的第二項消失，得 $\mathrm{g}''=\mathrm{f}''\,(1-\mathrm{f}^{-2})$。

- $x=\frac{\pi}{6}$ 和 $x=\frac{5\pi}{6}$：此時 $\sin x=\frac{1}{2}$，$\cos 2x=\frac{1}{2}$，所以 $\mathrm{f}=\frac{11}{2}$ 且 $\mathrm{f}''=-2-1=-3$。於是 $\mathrm{g}''=-3\big(1-\frac{4}{121}\big)<0$：兩點都是**極大點**（maxima），並且

$$\mathrm{g}=\tfrac{11}{2}+\tfrac{2}{11}=\tfrac{125}{22}.$$

- $x=\frac{\pi}{2}$：此時 $\sin x=1$，$\cos 2x=-1$，所以 $\mathrm{f}=5$ 且 $\mathrm{f}''=4-2=2$。於是 $\mathrm{g}''=2\big(1-\frac{1}{25}\big)=\frac{48}{25}>0$：這是**極小點**（minimum），並且 $\mathrm{g}=5+\frac{1}{5}=\frac{26}{5}$。
- $x=\frac{3\pi}{2}$：此時 $\mathrm{f}=1$，所以 $1-\mathrm{f}^{-2}=0$，同時 $\mathrm{f}'=0$。因此 $\mathrm{g}''=0$。

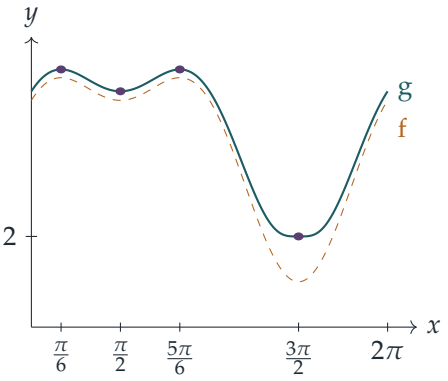
> **想一想** 二階導數判別法（second-derivative test）在 $x=\frac{3\pi}{2}$ 處失效。還有甚麼方法可以判斷？

回到 $h(t)=t+1/t$。對於 $t>0$，

$$t+\frac{1}{t}-2=\frac{(t-1)^2}{t}\ge 0,$$

等號只在 $t = 1$ 時成立。由於 $\mathrm{f} > 0$，由此可得對每一個 x 都有 $\mathrm{g}(x) \geq 2$，而等號恰好在 $\mathrm{f}(x) = 1$ 時成立。在 $x = \frac{3\pi}{2}$ 處有 $\mathrm{g} = 2$，所以這是**極小點**（事實上是 g 的全域最小值（global minimum））。

總結。極大點在 $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$（值為 $\frac{125}{22}$）；極小點在 $x = \frac{\pi}{2}$（值為 $\frac{26}{5}$）和 $x = \frac{3\pi}{2}$（值為 2）。



驗算

- 由於 h 在 $t > 1$ 時遞增，凡是 $\mathrm{f} > 1$ 之處，g 都應該隨 f 一同升降；圖像證實 f（虛線）和 g 有相同的轉向點（turning point）。
- 數值上，$\mathrm{g}(\frac{\pi}{6}) \approx 5.6818 = \frac{125}{22}$ 而 $\mathrm{g}(\frac{\pi}{2}) = 5.2$；在 $[0, 2\pi]$ 上對 g 作細密掃描，只在 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ 找到轉向點，最小值為 2.000。
- g'' 的公式與在隨機選取的點上以有限差分（finite difference）計算的二階導數吻合。

常見錯誤

- 忘記因子 $1 - \mathrm{f}^{-2}$：在本題中它沒有帶來新的駐點，但這只是因為 $\mathrm{f} = 1$ 恰好發生在 $\mathrm{f}' = 0$ 之處。你仍然必須檢查這個因子。
- 由 $\mathrm{g}''(\frac{3\pi}{2}) = 0$ 就斷定該點是拐點（point of inflection）。二階導數為零，單憑這一點並不能說明甚麼。

STEP 之外

$x = \frac{3\pi}{2}$ 這個退化點在複合函數中十分典型：如果 f 取極小值之處恰好也是 h 取極小值之處，$h \circ \mathrm{f}$ 在該處就會「更平坦」，二階導數亦隨之為零。大學的數學分析（analysis）以泰勒定理（Taylor's theorem）取代二階導數判別法，按第一個非零的導數來為這類點分

類，或者（像我們所做的那樣）直接用不等式來判斷。Abbott 的 *Understanding Analysis* 嚴謹地建立中值定理（mean value theorem）和泰勒定理，是了解這些內容的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。