詳細解答

STEP I 1988，第 16 題

概率與統計 • 連續分佈與條件化

STEP I 1988，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/88-s1-q16

關鍵思路

第一部分是一道歸一化（normalisation）與積分的練習：題目只給出密度函數（density）到相差一個常數的程度，所以我們必須要求總概率為 1，從而求出這個常數；而 $t^2/(1+t^2)^2$ 的積分，只要把它拆成 $1/(1+t^2)$ 與 $t/(1+t^2)$ 的導數，便迎刃而解。其後的檢驗制度只是一棵簡短的分情況樹形圖。只有車齡 4 和 5 時的檢驗才有影響（車齡 3 之前沒有汽車會生鏽），所以我們按汽車在第四次檢驗時是否已經生鏽來分情況，而最後一部分就是在同一棵樹形圖上運用貝葉斯定理（Bayes' theorem）。

解答

開始生鏽時間的分佈

設汽車在車齡 $3+T$ 時開始生鏽，其中 $T \geq 0$ 的密度函數為 $f(t) = k\,t^2/(1+t^2)^2$，k 為某常數。關鍵的積分來自以下觀察：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{1+t^2}\right) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}, \qquad \text{故} \qquad \frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\right),$$

只要把括號內的式子通分，以 $(1+t^2)^2$ 為公分母，便可驗證：分子為 $(1+t^2)-(1-t^2) = 2t^2$。因此

$$\int_0^t \frac{s^2}{(1+s^2)^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(\arctan t - \frac{t}{1+t^2}\right).$$

當 $t \to \infty$ 時，$\arctan t \to \frac{\pi}{2}$ 而 $t/(1+t^2) \to 0$，所以在 $[0,\infty)$ 上的積分為 $\frac{\pi}{4}$。要使 f 成為密度函數，我們需要 $k \cdot \frac{\pi}{4} = 1$，故 $k = 4/\pi$。於是

$$F(t) = \mathrm{P}(\text{開始生鏽時車齡小於} 3+t) = \mathrm{P}(T < t) = \frac{2}{\pi}\left(\arctan t - \frac{t}{1+t^2}\right), \quad t \geq 0.$$

（留意 $F(t) \to 1$：每輛汽車終究都會生鏽。）

我們需要以下兩個數值：

$$F(1) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \approx 0.1817,$$
$$F(2) = \frac{2}{\pi}\left(\arctan 2 - \frac{2}{5}\right) \approx 0.4502.$$

第五周年檢驗不合格

車齡 3 之前沒有汽車生鏽，所以車齡 1、2 和 3 時的檢驗必定合格（恰好在第三次檢驗那一刻開始生鏽的概率為零）。汽車要在車齡 5 時不合格，必須在車齡 4 時合格，然後在車齡 5 時不合格，而不合格的前提是車齡 5 時已經生鏽。鏽蝕永遠不會消失，所以這件事有兩種互斥（disjoint）的發生方式。

- 車齡 4 時已經生鏽（概率為 $F(1)$）。它以概率 $\frac{1}{2}$ 通過第四次檢驗，然後在仍然生鏽的情況下，以概率 $\frac{1}{2}$ 在第五次檢驗不合格。貢獻：$\frac{1}{4}F(1)$。
- 在車齡 4 與 5 之間開始生鏽（概率為 $F(2) - F(1)$）。它必定通過第四次檢驗，並以概率 $\frac{1}{2}$ 在第五次檢驗不合格。貢獻：$\frac{1}{2}\big(F(2) - F(1)\big)$。

這裏我們按題目的原意假設：一輛生鏽汽車在各次檢驗的結果彼此獨立（independent），亦與開始生鏽的時間獨立。

> ? **想一想** 為甚麼我們不用乘上通過車齡 1、2 和 3 時各次檢驗的概率？

因為這些檢驗都在任何汽車有可能生鏽之前進行，所以每輛汽車都會通過；該因子為 1。

把兩種情況相加，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{檢驗不合格時的車齡為5}) &= \tfrac{1}{4}F(1) + \tfrac{1}{2}\big(F(2) - F(1)\big) = \tfrac{1}{2}F(2) - \tfrac{1}{4}F(1)\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\arctan 2 - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{4\pi}\\ &= \boxed{\frac{1}{\pi}\left(\arctan 2 - \frac{3}{20}\right) - \frac{1}{8} \approx 0.1797.}\end{aligned}$$

已知在第五次檢驗後被銷毀，求第四次檢驗時已生鏽的概率

一輛在第五次檢驗後隨即被銷毀的汽車，正正就是在該次檢驗不合格（而之前各次全部合格）的汽車，亦即剛才求得的事件。設 A 為汽車在第四次檢驗時已經生鏽的事件，D 為它在第五次檢驗不合格的事件。上面第一點所述的正是 $A \cap D$，所以

$$\mathrm{P}(A \cap D) = \tfrac{1}{4}F(1) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi} = \frac{\pi - 2}{8\pi}.$$

根據條件概率（conditional probability）的定義，

$$\mathrm{P}(A \mid D) = \frac{\mathrm{P}(A \cap D)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{\dfrac{\pi - 2}{8\pi}}{\dfrac{1}{\pi}\left(\arctan 2 - \dfrac{3}{20}\right) - \dfrac{1}{8}}.$$

分子和分母同乘以 8π，

$$\boxed{\mathrm{P}(A \mid D) = \frac{\pi - 2}{8\arctan 2 - \frac{6}{5} - \pi} = \frac{5(\pi - 2)}{40\arctan 2 - 6 - 5\pi} \approx 0.253.}$$

所以在五年時被銷毀的汽車當中，只有約四分之一是在已經生鏽的情況下僥倖通過第四次檢驗的；大部分都是在第五年內才生鏽。

驗算

- $F(0) = 0$，而且當 $t \to \infty$ 時 $F(t) \to 1$，符合分佈函數（distribution function）應有的性質。對 $\frac{4}{\pi}\int_0^2 t^2/(1+t^2)^2\,\mathrm{d}t$ 使用辛普森法則（Simpson's rule）得 0.45018，與 $F(2)$ 吻合。
- 模擬 400 000 輛汽車（抽樣得出開始生鏽的時間，再進行每年的檢驗），得出五年時不合格的概率為 0.1789，條件概率為 0.255，而精確值分別為 0.1797 和 0.2528。
- 合理性檢查：$\mathrm{P}(D)$ 必須小於 $\frac{1}{2}F(2) \approx 0.225$（即車齡五年時已生鏽然後不合格的概率，當中不考慮較早被淘汰的情況），而事實的確如此。

常見錯誤

- 忘記歸一化：密度函數只是與 $t^2/(1+t^2)^2$ 成正比，漏掉因子 $4/\pi$ 會令其後每個答案都出錯。
- 把「車齡 5 時已生鏽」當作概率為 $F(2)$ 的單一情況，然後乘以 $\frac{1}{2}$。這樣做忽略了那些在車齡 4 時已生鏽、並在該次檢驗被淘汰的汽車。
- 在最後一部分，以「車齡 5 時已生鏽」而非「車齡 5 時不合格」作為條件。

STEP 之外

這裏的函數 F 是一個分佈函數，而比值 $f(t)/(1-F(t))$ 稱為風險率（hazard rate），即已知汽車至今仍未生鏽的條件下，瞬間生鏽的可能性；它是存活分析（survival analysis）與可靠性理論（reliability theory）的核心對象。最後一部分是濾波（filtering）的一個小

例子：從不完美的觀測（各次檢驗）推斷隱藏的狀態（是否生鏽）。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）正是以這種精神講解連續分佈與條件概率。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。