詳細解答

STEP I 1988，第 13 題

力學 • 彈性繩與碰撞

> **STEP I 1988，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q13

關鍵思路

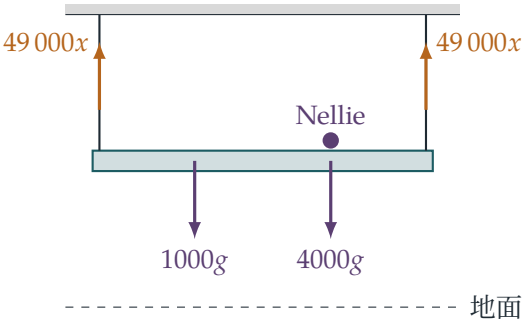
整個過程分為三個階段，每個階段各有自己的守恆定律（conservation law）。Nellie 落在木板上是一次突然發生的非彈性碰撞（inelastic collision），所以動量（momentum）守恆，但能量並不守恆。下降至地面的過程只涉及重力和彈性繩，所以能量守恆。Nellie 離開木板之後，能量再次守恆，而我們要問的是：儲存的彈性勢能是否足以把木板提升至超過繩子回復自然長度（natural length）的位置。

解答

我們把木板看成一個始終保持水平的剛體（rigid body），於是可以把它當作一個質量為 1000 kg、沿鉛垂方向運動的質點（particle）。Nellie 是一個質量為 4000 kg 的質點，而繩子是遵守虎克定律（Hooke's law）的輕彈性繩（light elastic string）。兩條繩子的伸長量（extension）x 始終相同，所以它們合共施加向上的力

$$2 \cdot \frac{490\,000}{10}\, x = 98\,000\, x \text{ N}.$$

因此這對繩子的作用就如一條勁度（stiffness）為 $K = 98\,000 \text{ N m}^{-1}$ 的彈簧，其彈性勢能（elastic energy）為 $\frac{1}{2}Kx^2 = 49\,000\, x^2$ J。



起始位置

Nellie 到來之前，木板懸掛着處於平衡（equilibrium）狀態，所以伸長量 e_0 滿足

$$98\,000\,e_0 = 1000 \times 9.8 \quad \Longrightarrow \quad e_0 = 0.1\text{ m}.$$

落在木板上

Nellie 落在木板上之後便留在上面，所以這是一次完全非彈性碰撞（perfectly inelastic collision）。撞擊歷時極短，而繩子的張力（tension）和各重量都是有限的力，所以它們在撞擊期間的衝量（impulse）可以忽略不計。因此動量守恆，而緊接撞擊之後的共同速率 v 滿足

$$4000 \times 5 = 5000\,v \quad \Longrightarrow \quad v = 4\text{ m s}^{-1}.$$

想一想 我們可以從 Nellie 到達的一刻起就直接使用能量守恆嗎？

不可以。一頭大象落在木板上並留在上面時，大量動能（kinetic energy）會轉化為熱和聲音：這裏 $\frac{1}{2}\cdot 4000\cdot 5^2 = 50\,000\,\text{J}$ 變成了 $\frac{1}{2}\cdot 5000\cdot 4^2 = 40\,000\,\text{J}$，即損失了 $10\,000\,\text{J}$。能量只是從緊接落下之後的一刻起才守恆。

下降過程

設 h 為木板最初離地面的高度。木板和 Nellie（總質量 5000 kg）以速率 4 m s^{-1} 出發，在低了距離 h 的地面處靜止下來，該處的伸長量為 $0.1 + h$。做功的力只有重力和繩子的拉力，所以

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot 5000\cdot 4^2}_{\text{動能損失}} + \underbrace{5000\cdot 9.8\,h}_{\text{重力勢能損失}} = \underbrace{49\,000[(0.1+h)^2 - 0.1^2]}_{\text{彈性勢能增加}},$$

$$40\,000 + 49\,000\,h = 49\,000\,(0.2h + h^2).$$

兩邊除以 49 000 並整理，得

$$h^2 - 0.8\,h - \tfrac{40}{49} = 0, \qquad \text{所以} \qquad h = 0.4 + \sqrt{0.16 + \tfrac{40}{49}} = \frac{14 + 2\sqrt{299}}{35},$$

由於 $h > 0$，這裏取正根。因此

$$h \approx 1.39\ \text{m}.$$

在這個階段中繩子一直保持拉緊，因為木板下降時伸長量只會增加。

Nellie 離開之後

Nellie 輕輕地走下木板，所以只剩下木板（1000 kg）靜止在地面處，伸長量為

$$X = 0.1 + h \approx 1.488\ \text{m}.$$

如果木板上升得足夠高，使伸長量降至零，繩子便會鬆弛（slack），這表示木板要上升高度 X。繩子拉緊期間能量守恆，因此只要儲存的彈性勢能大於勢能的增加，木板便會到達該高度：

$$\tfrac{1}{2}KX^2 = 49\,000\,X^2 \approx 108\,500\ \text{J}, \qquad 1000 \cdot 9.8 \cdot X \approx 14\,600\ \text{J}.$$

前者遠大於後者，所以木板到達自然長度位置時仍在向上運動，動能約為 93 900 J（速率約為 $13.7\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$）。在這一點之上，繩子要比自然長度更短才行，所以它們是鬆弛的。**會，繩子會變得鬆弛**。

> **想一想** 我們不可以直接用簡諧運動嗎？

可以，只要繩子仍然拉緊。木板獨自繞着其平衡伸長量 0.1 m 作簡諧運動（simple harmonic motion，簡稱 SHM），而它從平衡位置之下 $h \approx 1.39$ m 處出發，所以振幅（amplitude）是 1.39 m。振動的最高點會在伸長量為 $0.1 - 1.39 < 0$ 之處，而這對拉緊的繩子來說是不可能的。所以繩子必定在木板到達最高點之前鬆弛。（事實上，只要 $h > 0.1$，SHM 的論證便已給出答案。）

繩子一旦鬆弛，木板便只在重力作用下自由運動，再上升 $13.7^2/(2 \times 9.8) \approx 9.6$ m。這小於 10 m，所以木板（僅僅！）不會在回落之前碰到繩子的固定點。

驗算

- 把 $h = 1.3881$ 代入能量方程：兩邊都等於 108 017 J（準確至最接近的焦耳）。
- 由 $x = 0.1$、$\dot{x} = 4$ 出發，以數值方法逐步計算 $\ddot{x} = g - Kx/5000$，得出木板下降 1.3881 m 後停下。

- 逐步計算 Nellie 離開後木板的運動，顯示伸長量降至零時木板正以 $13.7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 向上運動，而最高點在地面之上 $11.07\,\mathrm{m}$，與 $X + 9.58$ 吻合。
- 單位：$490\,000\,\mathrm{N} / 10\,\mathrm{m}$ 給出 $\mathrm{N\,m^{-1}}$，所以能量方程中每一項的單位都是焦耳。

常見錯誤

- 在落下的一刻使用能量守恆，這樣得出的共同速率是 $\sqrt{20} \approx 4.47\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，而不是 $4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。
- 由自然長度起計算彈性勢能，卻忘記了初始伸長量 $0.1\,\mathrm{m}$：增加的能量是 $49\,000[(0.1+h)^2 - 0.1^2]$，而不是 $49\,000\,h^2$。
- 只用了一條繩子的勁度，而不是兩條。

STEP 之外

這對繩子是一條非線性彈簧（nonlinear spring）：拉長時它會拉，但壓縮時卻不能推。這類會在不同運動方程之間切換的系統，稱為分段線性（piecewise-linear）振子或「碰撞」振子（“impact” oscillator），即使是簡單的例子，其行為也可以出乎意料地複雜。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對能量、碰撞和振動有嚴謹的論述，而這些正是本題的全部基礎。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。