詳細解答

STEP I 1988，第 12 題

力學 • 變力作用下的運動

> **STEP I 1988，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q12

關鍵思路

對每一種方法，求出溜冰者朝岸邊最遠能前進多少；只要 d 大於其中至少一種方法的這個距離，她就安全，反之則不然。轉彎是典型的圓周運動（circular motion）：一個大小不變、與速度垂直的力會令她沿固定半徑的圓運動，而這個半徑正是她仍會向前推進的距離。煞停則是變力（variable force）問題：力取決於速率，但我們要求的是距離，這正提示我們把加速度寫成 $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。

解答

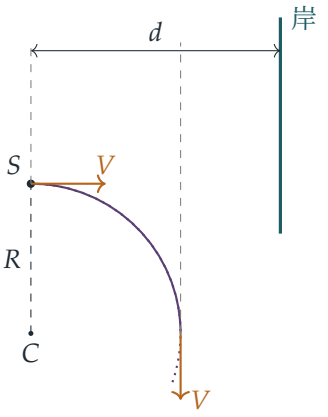
模型

我們把溜冰者視為質量為 M 的質點（particle），置於光滑（smooth）的水平冰面上。她在水平方向所受的唯一的力就是她自己施加的那個力，因此重量與法向反作用力（normal reaction）互相抵消，往後不必再考慮。我們由她的起點朝岸邊量度距離 x，所以岸邊位於 $x = d$。

方法一：沿圓弧轉彎

與速度垂直的力不做功，所以她的速率保持為 V。一個大小恆為 F 的力，若始終與速率恆為 V 的速度成直角，便提供了沿半徑為 R 的圓運動所需的向心力（centripetal force），其中

$$F = \frac{MV^2}{R}, \qquad \text{所以} \qquad R = \frac{MV^2}{F}.$$



她由 S 出發，正對着岸邊前進，所以圓心 C 位於通過 S 且與岸邊平行的直線上，與 S 相距 R。轉過角度 θ 之後，她朝岸邊前進的距離為 $x = R\sin\theta$，當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時達到最大值 R；這時她正與岸邊平行地運動，其後便會彎離岸邊。所以她能避開岸邊的條件是

$$d > \frac{MV^2}{F}.$$

（若恰好 $d = MV^2/F$，她會剛好擦過岸邊，沿着岸邊運動。）

方法二：煞停

現在力沿着她的運動直線正向後作用，所以她沿直線朝岸邊運動，並逐漸減速。由於我們要求的是距離而不是時間，把加速度寫成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，由牛頓（Newton）第二定律得

$$Mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{F(V^2+v^2)}{2V^2}.$$

分離變數（separating the variables），並由 $x = 0$（該處 $v = V$）積分至她停下的位置 $x = X$：

$$\int_V^0 \frac{v}{V^2+v^2}\,\mathrm{d}v = -\frac{F}{2MV^2}\int_0^X \mathrm{d}x,$$
$$\left[\tfrac{1}{2}\ln(V^2+v^2)\right]_V^0 = -\frac{FX}{2MV^2},$$
$$\tfrac{1}{2}\ln\frac{V^2}{2V^2} = -\tfrac{1}{2}\ln 2 = -\frac{FX}{2MV^2},$$

所以她的停止距離（stopping distance）為

$$X = \frac{MV^2}{F}\ln 2.$$

想一想 她真的會停下來嗎？還是她的速率只會趨近於零，而她永遠在緩緩向前挪動？

煞停的力永遠不會低於 $\frac{1}{2}F$，所以她的速率會在有限時間內降至零。具體來說，把 $M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{F}{2V^2}(V^2+v^2)$ 積分可得 $\frac{2MV}{F}(\arctan 1 - \arctan\frac{v}{V}) = t$，所以她在 $t = \pi MV/(2F)$ 時停下，其間走過有限的距離 X。（一旦靜止，她便不再施力。）因此當 $d > X$ 時，煞停可以救她；若 $d = X$，她到達岸邊時速率為零，只是碰到岸邊而沒有任何撞擊。

比較兩種方法

由於 $\ln 2 \approx 0.693 < 1$，停止距離比轉彎半徑短：煞停是較佳的方法，而且凡是轉彎行得通的情況，煞停也行得通。因此，她能夠避免撞上岸邊，當且僅當

$$\boxed{d > \frac{MV^2}{F}\ln 2}$$

（而 $d = \frac{MV^2}{F}\ln 2$ 是臨界情況，這時她到達岸邊時剛好靜止）。

質點假設

真實的溜冰者是有大小的：她的身軀和手臂會伸到質心（centre of mass）前方一段距離，所以實際上她所需的 d 要比上述數值大，多出的大約就是這段伸展的長度。更重要的是，這些力來自她的冰刀對冰面的作用。要轉彎，她必須向彎內傾側；要急煞，她必須把冰刀扭至橫向於運動方向（即冰球式急停，hockey stop），這會令她的身體轉向側面。這類轉動與姿勢，正是質點模型所忽略的。模型還暗中假設了冰面確實能夠提供這些力，儘管冰面被稱為光滑；即使沿冰刀方向沒有摩擦力，冰刀在橫向仍能抓緊冰面。

驗算

- 單位：MV^2/F 的單位是 $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}/N} = \mathrm{m}$，是長度，正如所應得的。
- 上下界：煞停的力介乎 $\frac{1}{2}F$ 與 F 之間。恆力 F 會令她在距離 $MV^2/(2F)$ 內停下，而恆力 $\frac{1}{2}F$ 則為 MV^2/F；事實上確有 $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$。
- 數值驗證：隨機選取 M、V、F（例如 $R = MV^2/F = 7.0747$），以龍格－庫塔（Runge–Kutta）積分法逐步計算兩種運動，得出轉彎時最遠前進距離為 7.0747，煞停時停止距離為 $4.9038 = R\ln 2$，停止時間為 $\pi MV/(2F)$。

常見錯誤

- 把圓心放在運動直線上（或放在岸邊），因而得出前進距離為 $2R$ 或 0；其實圓心應在她的旁邊，前進距離才是 R。
- 處理煞停時使用 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，然後苦於求不出距離；用 $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 只需積分一次便可得出。
- 給出兩個各自獨立的條件，卻沒有加以比較。題目問的是她能夠脫險的 d 值所成的集合，所以我們需要的是兩種方法中較佳的一種。

STEP 之外

寫出 $\ddot{x} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 是邁向能量方法的第一步：對於只取決於位置的力，它就是功能定理（work–energy theorem），而在大學力學中，它會發展成勢（potential）以及描述運動的相平面（phase plane）圖。溜冰者在轉向與煞停之間的抉擇，也是一個簡單的最優控制（optimal control）問題：怎樣運用有限的力來避開障礙物，才是最好的方法？Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）正好在高一個層次上討論取決於速度的力和圓周運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。