詳細解答

# STEP I 1988，第 11 題

力學 • 質心

> **STEP I 1988，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q11

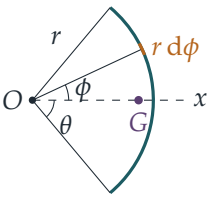
## 關鍵思路

對於圓弧，由對稱性可知質心（centre of mass）位於平分圓弧的半徑上，只需對角度作一次積分，便可求出質心與圓心的距離。至於框架，最值得注意的是它以半圓上的每一點着地都能平衡。地面的反作用力（reaction）總是沿半圓的半徑作用，而同時位於所有這些半徑上的點只有圓心。因此整個框架的質心必定是半圓的圓心，再對該點取力矩（moments），便得到一條關於 $h$ 的方程。

## 解答

### 均勻圓弧

設圓弧的圓心為 $O$，每單位長度的密度為 $\rho$。從平分圓弧的半徑起量度角 $\phi$，則圓弧為 $-\theta \leq \phi \leq \theta$。取 $x$ 軸沿該平分線。由於圓弧關於此軸對稱，質心必在此軸上，故只需求 $\bar{x}$。




介乎 $\phi$ 與 $\phi + \mathrm{d}\phi$ 之間的線元長度為 $r\,\mathrm{d}\phi$，故質量為 $\rho r\,\mathrm{d}\phi$，而它的 $x$ 坐標為 $r\cos\phi$。總

質量為 $\rho r \cdot 2\theta$。因此

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_{-\theta}^{\theta} r\cos\phi \; \rho r \, \mathrm{d}\phi}{2\rho r\theta} = \frac{r[\sin\phi]_{-\theta}^{\theta}}{2\theta} = \frac{r\sin\theta}{\theta}.$$

所以質心位於平分圓弧的半徑上，與圓心的距離為

$$\boxed{\bar{x} = \frac{r\sin\theta}{\theta}}$$

對於半圓弧，$\theta = \frac{\pi}{2}$，此距離為 $\dfrac{2r}{\pi}$，這正是下文要用到的情況。

### 框架：質心必須在哪裏？

我們把框架視為剛體（rigid body），由每單位長度密度同為 $\rho$ 的均勻幼桿組成，並假設地面是水平的。設 $O$ 為半圓的圓心，亦即長方形底邊的中點。

> **想一想** 為甚麼「以半圓上任何一點着地都處於平衡（equilibrium）」就能完全確定質心的位置？

假設框架以半圓上的點 $P$ 着地而靜止。地面在 $P$ 點與半圓相切，所以通過 $P$ 的鉛垂線垂直於該切線：它就是半徑所在的直線 $OP$。作用於框架的力只有兩個，即作用於質心 $G$ 的重量和作用於 $P$ 的反作用力。要達至平衡，兩力必須沿同一直線作用，所以 $G$ 位於通過 $P$ 的鉛垂線上，亦即直線 $OP$ 上。這對半圓上的每一點 $P$ 都成立。兩個不同的點 $P$ 給出兩條通過 $O$ 的不同直線，而它們只相交於 $O$。因此 $G = O$。

反過來說，若 $G = O$，則對每一點 $P$，重量都沿 $OP$ 作用，剛好穿過接觸點，所以框架無論以哪一點接觸地面都處於平衡。因此題目的條件恰好等同於「$G$ 位於 $O$」。

### 對底邊取力矩

對底邊所在的直線取力矩，高度由 $O$ 起向上量度（故半圓在該直線之下）。各部分如下：

| 部分 | 質量 | 其質心的高度 | 力矩 |
|---|---|---|---|
| 頂桿 | $2r\rho$ | $2h$ | $4rh\rho$ |
| 兩條側桿 | $2 \times 2h\rho$ | $h$ | $4h^2\rho$ |
| 底桿 | $2r\rho$ | $0$ | $0$ |
| 半圓 | $\pi r\rho$ | $-\dfrac{2r}{\pi}$ | $-2r^2\rho$ |

半圓的質心由圓弧公式取 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 得出，而且它在 $O$ 的下*方*。由於 $G$ 的高度為 0，令總力矩等於零，再除以 $2\rho$：

$$2h^2 + 2rh - r^2 = 0.$$

這是一條關於 $h$ 的二次方程，其根為

$$h = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 + 8r^2}}{4} = \frac{(-1 \pm \sqrt{3})\, r}{2}.$$

由於 $h > 0$，我們取正根：

$$\boxed{h = \frac{(\sqrt{3} - 1)\, r}{2} \approx 0.366\, r}$$

留意底桿對它本身所在直線的力矩為零。無論框架是否包括底桿，答案都一樣，所以對圖形的理解稍有不同亦無妨。

## 驗算

- 當 $\theta \to 0$ 時，$\frac{r \sin\theta}{\theta} \to r$：極短的圓弧，其質心就在圓弧本身之上。對於整個圓，$\theta = \pi$，我們得到 0，即圓心，正如對稱性所要求。
- 取 $h = \frac{(\sqrt{3}-1)r}{2}$：$2h^2 = (2 - \sqrt{3})r^2$ 而 $2rh = (\sqrt{3} - 1)r^2$，兩者相加為 $r^2$，符合要求。
- 我們把每條桿分成 20 000 小段，以數值方法計算質心。取 $r = 1$ 及 $h \approx 0.36603$，質心與 $O$ 的距離小於 $10^{-9}$。把 $h$ 增加 10%，質心便上移約 0.03，框架就不能再平衡了。

## 常見錯誤

- 誤用 $\frac{4r}{3\pi}$，那是半圓形薄片（lamina）的結果；半圓形金屬線應使用 $\frac{2r}{\pi}$。
- 以角度而非長度作加權：線元的質量是 $\rho r\, \mathrm{d}\phi$，因子 $r$ 之所以能約去，只因為它同樣出現在總質量之中。
- 沒有給出理由便斷言 $G$ 位於 $O$。論證的關鍵在於反作用力總是沿半徑作用。

## STEP 之外

圓弧的積分是把質心表示為沿曲線的線積分（line integral）$\int \mathbf{r}\, \rho\, \mathrm{d}s$ 的最簡單例子。大學一年級的課程會進一步利用二重積分和三重積分處理曲面和立體，而帕普斯（Pappus）定理則把這些質心與旋轉體的面積和體積聯繫起來。這個平衡論證也是搖擺穩定性背後的想法：物體擱在曲面上時，若其質心低於曲率中心（centre of curvature），它便是穩定的。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是以這種精神處理質心和剛體平衡。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。