詳細解答

STEP I 1988，第 10 題

力學 • 拋體運動

> **STEP I 1988，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q10

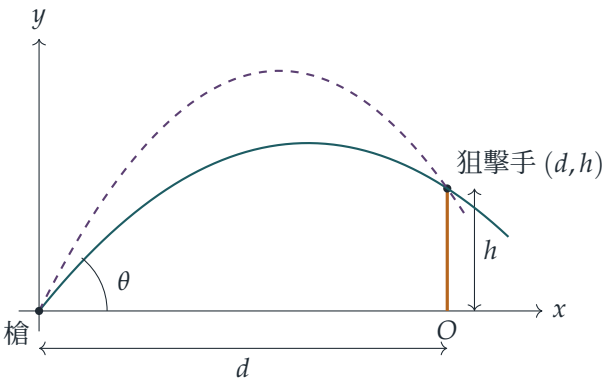
關鍵思路

把問題反過來想。設槍與樹腳的水平距離為 d，然後問：是否存在任何一個仰角，使速率為 v 的子彈剛好經過樹頂？以 $\tan\theta$ 表示的軌跡方程，是 $\tan\theta$ 的二次方程，所以答案為「是」的充要條件，就是該二次方程有實根。由判別式（discriminant）得出的條件，原來是一個只涉及 d 的不等式。

解答

模型

我們把子彈視為只受重力作用的質點（particle）（不計空氣阻力），由地面以速率 v、與水平成 θ 的仰角（angle of elevation）射出，其中 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$。由於槍的位置未知，設它與樹腳 O 的距離為 $d \geq 0$，並以槍為原點建立坐標軸，x 軸水平指向樹，y 軸鉛垂向上。於是樹頂就是點 (d, h)。



擊中狙擊手

經過時間 t 後，子彈位於 $x = vt\cos\theta$，$y = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$。若 $\theta < \frac{\pi}{2}$，我們以 $t = x/(v\cos\theta)$ 消去時間，並利用 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$，得到軌跡（trajectory）

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v^2}(1+\tan^2\theta).$$

子彈擊中狙擊手，當且僅當 (d,h) 位於這條曲線上。先假設 $d > 0$。記 $T = \tan\theta$ 及 $k = \dfrac{gd^2}{2v^2} > 0$，條件就是

$$kT^2 - dT + (h+k) = 0.$$

每個實數 T 都恰好是唯一一個 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的 $\tan\theta$。不過，根會不會是負數呢？兩根之積為 $(h+k)/k > 0$，兩根之和為 $d/k > 0$，所以只要有實根，兩根都必為正數，對應真正的仰角 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。因此，存在可行的仰角，當且僅當這個二次方程有實根，亦即其判別式非負：

$$\begin{aligned} d^2 - 4k(h+k) \geq 0 &\iff d^2 \geq \frac{2gd^2}{v^2}\left(h + \frac{gd^2}{2v^2}\right) \\ &\iff v^4 \geq 2ghv^2 + g^2d^2 \qquad \text{（除以 } d^2 > 0\text{，再乘以 } v^4\text{）} \\ &\iff d^2 \leq \frac{v^2}{g^2}(v^2 - 2gh). \end{aligned}$$

? **想一想** 假如槍就在樹腳，即 $d = 0$，以致上面的軌跡方程派不上用場，那又如何？

這時子彈必定是鉛垂向上射出的（$\theta = \frac{\pi}{2}$），而它能到達高度 h，當且僅當 $v^2 \geq 2gh$；這可由 $v^2 = u^2 - 2gs$ 及末速率不小於零得出。這正是 $d = 0$ 時的同一條件，所以該不等式涵蓋了所有情況。

由於 $d \geq 0$，取非負平方根便得

$$d \leq \frac{v}{g}\sqrt{v^2 - 2gh}.$$

所以槍位於水平地面上的某一點，而該點與樹腳的距離至多為 $(v/g)\sqrt{v^2-2gh}$：它位於以樹腳為圓心、以此為半徑的圓之內（極端情況下則在圓上），正如所求。平方根是實數，因為我們知道這一槍確實發生了：取 $d = 0$ 時，不等式迫使 $v^2 \geq 2gh$，這不過是說子彈有足夠的能量升到高度 h。

這個條件也是充分的。從圓內任何一點出發，該二次方程都有兩個正實根，所以有兩個可能的仰角（一個較平、一個較陡的射擊，如圖所示）；而在圓上，兩者合而為一。

驗算

- 當 $h = 0$ 時，半徑為 v^2/g，正是大家熟悉的水平地面上的最大射程。當 $v^2 \to 2gh$ 時，半徑縮小至 0：槍只有在樹腳筆直向上射擊，才僅僅能夠擊中狙擊手。
- 單位：$(v/g)\sqrt{v^2}$ 的單位是 $(\mathrm{m\,s^{-1}})^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}) = \mathrm{m}$。
- 數值上，取 $g = 9.8$、$v = 20$ 及 $h = 8$，半徑約為 31.8 m。從 $d = 31.8\,\mathrm{m}$ 出發，以唯一容許的仰角 $\tan\theta = v^2/(gd)$ 逐步推算運動，子彈到達樹的位置時高度為 8.000 m。再對所有仰角逐一掃描，可確認圓外百分之幾的點無法擊中目標，而圓內的點則可以。

常見錯誤

- 只用最大射程 v^2/g 或只用最大高度。狙擊手位於高度 h，所以兩個坐標必須同時考慮。
- 忘記檢查 $\tan\theta$ 的根是否對應水平以上的仰角，或忽略了 $d = 0$ 的鉛垂射擊。

STEP 之外

對於固定的 v，由槍可以射到的點填滿了拋物線 $y = \dfrac{v^2}{2g} - \dfrac{gx^2}{2v^2}$ 以下的區域；這條拋物線是整族軌跡的包絡線（envelope），又稱「安全拋物線」（parabola of safety）。我們的判別式條件，正正就是 $h \leq$ 這條包絡線在 $x = d$ 處的高度。曲線族的包絡線，在變分法（calculus of variations）和一階微分方程的理論中還會再次出現。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材），以同樣嚴謹的方式處理拋體問題，是很好的進階讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。