詳細解答

STEP I 1988，第 1 題

純數學 • 曲線描繪

STEP I 1988，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/88-s1-q1

關鍵思路

方程 $n^m = m^n$ 把兩個變數分別放在底數和指數的位置，糾纏在一起，處理起來並不方便。取對數(logarithm)後得到 $m\ln n = n\ln m$，再除以 mn 便可把兩者完全分開：$\frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m}$。因此我們要找兩個不同的整數，使 h 在這兩處取相同的值，而圖像的形狀正好告訴我們這樣的數對可以出現在哪裏。

解答

h 的圖像

用商法則（quotient rule）求導，

$$\mathrm{h}'(x) = \frac{x\cdot\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

由於 $x^2 > 0$，$\mathrm{h}'(x)$ 的正負號與 $1-\ln x$ 的正負號相同。所以 h 在 $(0,\mathrm{e})$ 上嚴格遞增（strictly increasing），在 (e,∞) 上嚴格遞減（strictly decreasing），並在 $x=\mathrm{e}$ 處取得極大值（maximum），其值為

$$\mathrm{h}(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

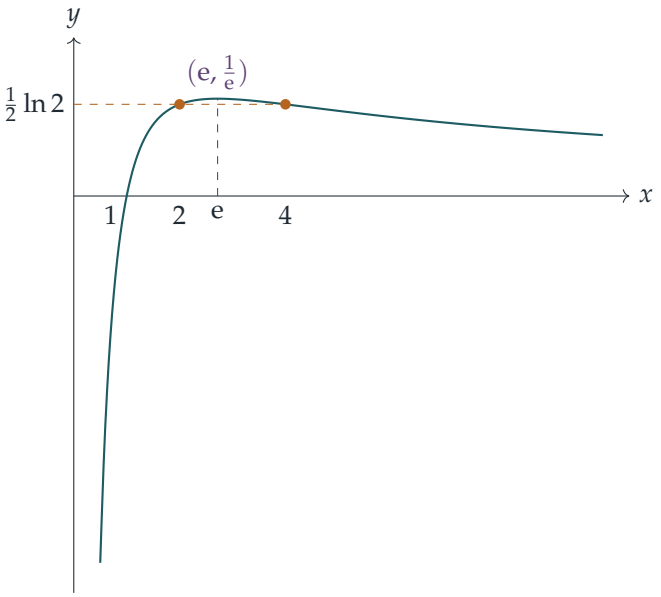
再求導一次，

$$\mathrm{h}''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3},$$

所以在 $x = \mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$ 處有一個拐點（point of inflection），該處 $\mathrm{h} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3/2} \approx 0.335$。曲線在這一點的左方是凹（concave）的，在右方是凸（convex）的。

接着看兩端的變化趨勢和函數的正負：

- 當 $x \to 0^+$ 時，$\ln x \to -\infty$ 而 $\frac{1}{x} \to +\infty$，所以 $\mathrm{h}(x) \to -\infty$：$y$-軸是一條漸近線（asymptote）。
- $\mathrm{h}(1) = 0$，而 $\mathrm{h}(x)$ 的正負號與 $\ln x$ 相同：在 $(0,1)$ 上為負，當 $x > 1$ 時為正。
- 當 $x \to \infty$ 時，$\frac{\ln x}{x} \to 0$（對數的增長比 x 的任何正數次冪都要慢），而且該處 $\mathrm{h}(x) > 0$，所以曲線從上方趨近 x-軸。



方程 $n^m = m^n$

由於 m 和 n 都是正數，等式兩邊均為正，可以取對數：

$$n^m = m^n \iff m\ln n = n\ln m \iff \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m} \iff \mathrm{h}(n) = \mathrm{h}(m),$$

其中中間一步除以了 $mn > 0$。所以我們要找滿足 $\mathrm{h}(m) = \mathrm{h}(n)$ 的相異正整數。由對稱性，不妨設 $m < n$。

想一想 圖像上哪些位置可以有兩個不同的點處於同一高度？

由於 h 在 $(0, \mathrm{e}]$ 上嚴格遞增，在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上嚴格遞減，它在這兩個區間上各自都是一對一（one-to-one）的。所以，輸出相同的兩個相異輸入必定分處 e 的兩側：$m < \mathrm{e} < n$。由於 m 是正整數而 $\mathrm{e} \approx 2.718$，故 $m = 1$ 或 $m = 2$。

- 若 $m = 1$，則 $\mathrm{h}(n) = \mathrm{h}(1) = 0$，由此必有 $\ln n = 0$，即 $n = 1 = m$，不合要求。（直接來看：$n^1 = 1^n$ 給出 $n = 1$。）

- 若 $m = 2$，則需要一個整數 $n \geq 3$ 使得 $\mathrm{h}(n) = \frac{1}{2}\ln 2$。而 $n = 4$ 正好符合，因為

$$\mathrm{h}(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2} = \mathrm{h}(2),$$

  也就是 $4^2 = 16 = 2^4$。由於 h 在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上嚴格遞減，它在該處取 $\frac{1}{2}\ln 2$ 這個值至多一次，所以 $n = 4$ 是唯一的可能。

因此，滿足 $n^m = m^n$ 的相異正整數對只有

$$(m, n) = (2, 4) \quad \text{及} \quad (m, n) = (4, 2).$$

驗算

用電腦以精確的整數運算搜尋所有 $1 \leq m, n \leq 300$，只找到 $(2, 4)$ 和 $(4, 2)$。數值上，$\mathrm{h}(2) = \mathrm{h}(4) = 0.346574\ldots$，僅略低於極大值 $1/\mathrm{e} = 0.367879\ldots$，與圖像所示吻合。你也可以看出為甚麼 $\mathrm{h}(3)$ 得不出任何解：$\mathrm{h}(3) \approx 0.366$ 大於 $\mathrm{h}(2)$，它在 e 左方的對應點嚴格介乎 2 與 e 之間，所以不是整數。

常見錯誤

- 靠試數找到 $(2, 4)$ 便就此停筆。題目要求找出*所有*數對，所以用單調性（monotonicity）論證再沒有其他數對，才是答案的核心。
- 畫草圖時忘記漸近性態：曲線在 y-軸附近直墜至 $-\infty$，但當 $x \to \infty$ 時只是緩緩趨向 0，此後不再穿過橫軸。

STEP 之外

如果容許實數，則 $(1, \mathrm{e})$ 內的每個 a 都恰好有一個對應的 $b > \mathrm{e}$ 使得 $a^b = b^a$，而這些數對可以簡潔地參數化（parametrise）為 $a = (1 + \frac{1}{t})^t$，$b = (1 + \frac{1}{t})^{t+1}$，其中 $t > 0$；當 $t \to \infty$ 時兩者都趨向 e，也就是圖像頂端兩邊相會之處。我們用過的極限 $\frac{\ln x}{x} \to 0$ 是比較增長率的第一個例子，大學的第一門分析課程會把它嚴格化；參見 Abbott, *Understanding Analysis*（一本分析學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。