詳細解答

STEP III 1987，第 8 題

純數學 • 平行四邊形面積不等式

STEP III 1987，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/87-s3-q8

關鍵思路

平行四邊形（parallelogram）的對角線（diagonal）互相平分（bisect），因此把它分成四個三角形，而這些三角形的面積可以用 $\frac{1}{2}ab\sin C$ 立即寫出。這樣便得到一條以對角線及其夾角表示面積的公式，題目開首的兩個結果都可由此直接推出。集合 A 是兩條帶狀區域相交之處，所以是一個平行四邊形。只要求出它的面積，第二個結果便告訴我們它較長的對角線必定夠長，而這條對角線的兩個端點正是我們要找的點。

解答

以對角線表示面積

設兩條對角線的長度為 p 和 q，相交所成的角為 θ，其中 $0 < \theta < \pi$。平行四邊形的對角線互相平分，所以把它分成四個三角形，每個三角形都有兩條邊 $\frac{1}{2}p$ 和 $\frac{1}{2}q$ 在中心相交。其中兩個三角形在該處的角為 θ，另外兩個則為 $\pi - \theta$。由於 $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$，每個三角形的面積都是 $\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2}\sin\theta$，所以

$$\text{面積} = 4 \cdot \tfrac{1}{8}pq\sin\theta = \tfrac{1}{2}pq\sin\theta.$$

若 p 和 q 固定，則當 $\sin\theta$ 最大時面積最大，即 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 之時。因此面積取最大值，當且僅當兩條對角線互相垂直，而最大面積為 $\frac{1}{2}pq$。

以較長對角線表示的上界

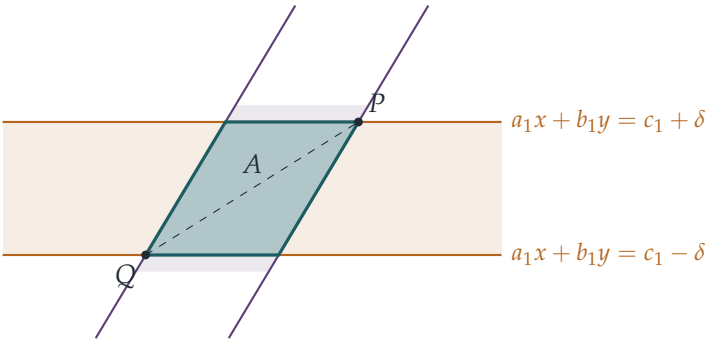
設 $p \geq q$，即 p 是較長的對角線（或兩條等長對角線的其中一條）。先用 $\sin\theta \leq 1$，再用 $q \leq p$，得

$$\text{面積} = \tfrac{1}{2}pq\sin\theta \leq \tfrac{1}{2}pq \leq \tfrac{1}{2}p^2.$$

所以面積最多是較長對角線平方的一半。等號成立需要 $\sin\theta = 1$ 及 $q = p$，故只有正方形才能取等號。

集合 A 是平行四邊形

假設 $\delta > 0$。（若 $\delta = 0$，則上界為 0，把 A 中任意一點取兩次即可。）不等式（inequality）$|a_1x + b_1y - c_1| \leq \delta$ 的意思是 $c_1 - \delta \leq a_1x + b_1y \leq c_1 + \delta$。因此它描述的是兩條平行線 $a_1x + b_1y = c_1 \pm \delta$ 之間的閉帶狀區域（closed strip）。同理，第二條不等式給出第二條帶狀區域。條件 $a_1b_2 \neq a_2b_1$ 表示法向量（normal vector）$\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$ 與 $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$ 不平行。所以兩條帶狀區域相交，而且 $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$ 都不是零向量。它們的交集（intersection）A 是一個平行四邊形，由兩對平行線圍成。



圖中顯示第一條帶狀區域（琥珀色）和第二條帶狀區域的一部分（紫紅色）。它們的交集 A（藍綠色）是一個平行四邊形，虛線是它較長的對角線。

A 的面積

平行線 $a_1x + b_1y = c_1 \pm \delta$ 之間的距離為

$$h_1 = \frac{2\delta}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

這裏用了點到直線的距離公式。同理，第二條帶狀區域的闊度為 $h_2 = 2\delta / \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$。設 φ 為兩組直線之間的夾角，其中 $0 < \varphi < \pi$。在 A 的各邊之中，位於第二條帶狀區域邊界上的兩條邊以角 φ 橫越第一條帶狀區域，所以每條的長度為 $h_1 / \sin\varphi$。這兩條邊之間

的垂直距離為 h_2，所以

$$\text{面積}A = \frac{h_1 h_2}{\sin\varphi}.$$

想一想 怎樣由各系數求出 $\sin\varphi$？

兩條直線之間的夾角等於它們法線之間的夾角，或該角的補角（supplement），而兩者的正弦值相同。對於向量 $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$ 和 $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$，它們所張成的平行四邊形面積為 $|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|\sin\varphi$。這個面積亦等於 $|a_1b_2 - a_2b_1|$，即 2×2 行列式（determinant）的絕對值。因此

$$\sin\varphi = \frac{|a_1b_2 - a_2b_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

代入後，平方根互相抵消：

$$\text{面積}A = \frac{2\delta}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\cdot\frac{2\delta}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\cdot\frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}{|a_1b_2-a_2b_1|} = \frac{4\delta^2}{|a_1b_2-a_2b_1|}.$$

所求的兩點

設 PQ 為 A 較長的對角線，並記 $P = (x_1, y_1)$ 及 $Q = (x_2, y_2)$。這兩點是 A 的頂點，而帶狀區域包含其邊界線，所以它們都在 A 之內。由第一部分的上界，

$$\frac{4\delta^2}{|a_1b_2-a_2b_1|} = \text{面積}A \le \tfrac{1}{2}PQ^2,$$

所以

$$(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = PQ^2 \ge \frac{8\delta^2}{|a_1b_2-a_2b_1|},$$

這正是所要證明的。

驗算

- 取 $a_1 = b_2 = 1$ 及 $a_2 = b_1 = 0$，則 A 是正方形 $|x - c_1| \le \delta$，$|y - c_2| \le \delta$。它的對角線平方為 $(2\delta)^2 + (2\delta)^2 = 8\delta^2$，剛好等於上界。這是合理的，因為正方形正是第一部分中等號成立的情況。
- 縮放：若把 a_1、b_1 和 c_1 都加倍，第一條帶狀區域的闊度減半，A 的面積減半，而 $|a_1b_2 - a_2b_1|$ 則加倍。公式的變化與此吻合。
- 我們用電腦測試了 10^5 個隨機例子。我們解邊界方程求出 A 的頂點，再用鞋帶公式（shoelace formula）計算面積，每次都與 $4\delta^2/|a_1b_2 - a_2b_1|$ 相符。（較長對角線）^{2} 與上界之比的最小值為 1.0007，從未低於 1。

常見錯誤

- 把帶狀區域的闊度當作 2δ。其實 $|a_1x + b_1y - c_1| \leq \delta$ 的闊度是 $2\delta/\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$。
- 忘記說明為何所選的點在 A 之內。原因是它們是頂點，而 A 包含其邊界。
- 把 A 的面積寫成 h_1h_2，這只在兩條帶狀區域互相垂直時才正確。

STEP 之外

這個面積計算是一個基本事實的特例：矩陣為 M 的線性映射（linear map）會把所有面積乘以 $|\det M|$。這裏的映射 $(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y,\ a_2x + b_2y)$ 把 A 映到一個面積為 $4\delta^2$ 的正方形，所以 A 的面積為 $4\delta^2/|\det M|$。這就是在二重積分（double integral）中作變數代換時遇到的雅可比（Jacobian）因子。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）正是以這種方式，把行列式看作面積和體積來闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。