詳細解答

STEP III 1987，第 7 題

純數學 • 反正切的級數

STEP III 1987，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/87-s3-q7

關鍵思路

$\tan^{-1} t$ 的級數（series）來自對 $1/(1+x^2)$ 求積分，而 $1/(1+x^2)$ 正是公比為 $-x^2$ 的等比級數（geometric series）之和。把等比級數在有限項之後截斷，會留下一個精確的餘項（remainder），再對這個餘項積分，便得到誤差項（error term）。在 $[0,1]$ 上，因子 $1/(1+x^2)$ 介乎 $\frac{1}{2}$ 與 1 之間，於是誤差便被夾在兩個容易計算的積分之間。

解答

恆等式

對任意實數 x，首項為 1、公比為 $-x^2$ 的有限等比級數給出

$$\sum_{r=0}^{n}(-x^2)^r = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2},$$

此式成立，因為公比 $-x^2$ 永遠不等於 1。移項整理，得

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

這是一個精確的恆等式（identity），並非近似。把兩邊由 0 積分至 t。由於 $\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \tan^{-1} t$ 及 $\int_0^t x^{2r}\,\mathrm{d}x = \frac{t^{2r+1}}{2r+1}$，

$$\tan^{-1} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^t \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

這正是所求。此式對所有實數 t 均成立。

上下界

記 $S_n(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r t^{2r+1}}{2r+1}$。由上述恆等式，

$$\left|\tan^{-1} t - S_n(t)\right| = \int_0^t \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

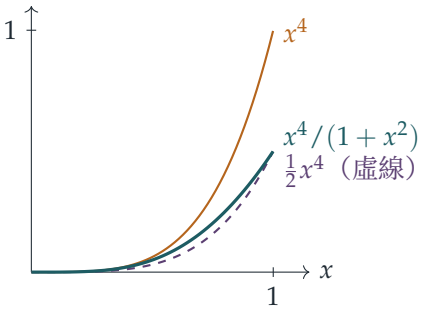
右邊的絕對值符號可以略去，因為當 $t \geq 0$ 時，被積函數（integrand）非負，而且積分是由小到大進行的。

想一想 一個無法以閉合形式（closed form）求值的積分，我們可以怎樣估計？

用常數來界定被積函數中難處理的部分。當 $0 \leq x \leq 1$ 時，我們有 $1 \leq 1+x^2 \leq 2$，所以

$$\tfrac{1}{2}x^{2n+2} \leq \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}.$$

下圖顯示 $n = 1$ 的情況：被積函數（藍綠色）被夾在 x^4 與 $\frac{1}{2}x^4$ 之間。



把這些不等式由 0 積分至 t（由於 $t \geq 0$，不等號方向保持不變），得

$$\frac{t^{2n+3}}{2(2n+3)} \leq \left|\tan^{-1} t - S_n(t)\right| \leq \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

這就是所要證明的結果。

π 的級數

取 $t = 1$，此時 $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ 而 $S_n(1) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1}$。由上界（upper bound）可得

$$\left|\pi - 4\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3} \to 0 \quad \text{當} n \to \infty,$$

所以 $4\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1} \to \pi$。

想一想 兩個界之中，哪一個告訴我們這個近似很差？

是下界（lower bound）：它說明誤差不可能很小。把 $t=1$ 時左邊的不等式乘以 4，

$$\left|\pi - 4\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{2r+1}\right| \geq \frac{4}{2(2n+3)} = \frac{2}{2n+3}.$$

若 $n \leq 98$，則 $2n+3 \leq 199 < 200$，所以 $\frac{2}{2n+3} > \frac{2}{200} = 10^{-2}$。因此對所有 $n \leq 98$，誤差至少為 10^{-2}（事實上嚴格大於此數）。由於誤差小於 $4/(2n+3)$，一百項只換來大約兩個小數位的準確度，所以用這個級數來計算 π 是非常緩慢的。

驗算

- $n=0$，$t=1$：上下界給出 $\frac{1}{6} \leq \left|\frac{\pi}{4} - 1\right| \leq \frac{1}{3}$。事實上 $1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215$。
- 以數值計算，當 $n=98$ 時誤差為 $|\pi - 4S_{98}(1)| \approx 0.01010$，僅僅高於 10^{-2}。當 $n=99$ 時誤差約為 0.0099998，僅僅低於此值。所以 98 正好是分界點。我們亦以數值積分（quadrature）對隨機的 t 和 n 驗證了恆等式，並對數千個隨機的 $t \in [0,1]$ 驗證了雙邊的界。

常見錯誤

- 把 $1/(1+x^2)$ 展開成無窮級數，然後逐項積分。這樣做需要 $|x|<1$，還要說明為何可以交換求和與積分的次序。採用帶有精確餘項的有限形式，則兩者皆可避免。
- 用上界來論證誤差很大。只有下界才能做到這一點。

STEP 之外

這其實是帶積分形式餘項的泰勒定理（Taylor's theorem），只是針對一個函數親手推導出來。$t=1$ 時的級數就是萊布尼茲（Leibniz）級數，又稱馬德哈瓦（Madhava）–格雷果里（Gregory）級數。它的誤差大約為 $1/(2n)$，這是各項遞減緩慢的交錯級數（alternating series）的典型表現。較快的公式，例如梅欽（Machin）公式 $\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$，是把同一個級數用於較小的 t，此時 t^{2n+3} 會迅速縮小。若想了解餘項與收斂（convergence）的嚴格處理，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。