詳細解答

STEP III 1987，第 6 題

純數學 • 耦合微分方程

> **STEP III 1987，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q6

關鍵思路

處理一對耦合的一階方程（coupled first-order equations），最好的做法是把它們化為只含一個未知函數的二階方程。利用第一條方程，可把 y 用 x 和 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 表示，再代入第二條方程，便得到一條關於 x 的受迫振子（forced oscillator）方程。答案的整體性質，就取決於這個振子的固有頻率（natural frequency）與外力項 $2\cos t$ 的頻率相比如何。

解答

以字母上方加點表示對 t 的導數。

消去 y

由第一條方程，

$$y = \tfrac{1}{5}\left(\dot{x} + 2x\right), \qquad \text{所以} \qquad \dot{y} = \tfrac{1}{5}\left(\ddot{x} + 2\dot{x}\right).$$

把兩者代入第二條方程，再乘以 5，

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5ax - 2\left(\dot{x} + 2x\right) = 10\cos t,$$
$$\ddot{x} + \left(5a - 4\right)x = 10\cos t.$$

含 $\dot{x}$ 的項互相抵消，所以沒有阻尼（damping）：這是一個純粹的受迫振子，固有頻率為 $\sqrt{5a-4}$（當 $5a > 4$ 時）。

轉換初始條件

題目給出 $x(0)=0$ 和 $\dot{y}(0)=0$，但關於 x 的方程需要的是 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$。把 $t=0$ 代入原來的第二條方程：

$$\dot{y}(0)+a\,x(0)-2y(0)=2 \quad\Longrightarrow\quad 0+0-2y(0)=2 \quad\Longrightarrow\quad y(0)=-1.$$

然後由第一條方程在 $t=0$ 的情況，得 $\dot{x}(0)=5y(0)-2x(0)=-5$。留意這兩步都沒有用到 a 的值，所以

$$x(0)=0, \qquad \dot{x}(0)=-5 \qquad \text{對所有}a.$$

想一想 條件是關於 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 的，而不是關於 y 的。我們該怎樣運用它？

微分方程本身已把 x、y 及它們的導數在任何一個時刻的值聯繫起來。在 $t=0$ 時，第二條方程把關於 $\dot{y}(0)$ 的資料轉化為關於 $y(0)$ 的資料，第一條方程再把它轉化為 $\dot{x}(0)$，而這正是關於 x 的二階方程所需要的。

$a=1$ 的情況

這時方程為

$$\ddot{x}+x=10\cos t.$$

餘函數（complementary function）是 $A\cos t+B\sin t$。外力項 $\cos t$ 本身就是齊次方程（homogeneous equation）的解（這就是共振（resonance）），所以試用 $C\cos t$ 是行不通的，我們改試 $x_p=t\,(C\cos t+D\sin t)$。求導兩次，

$$\ddot{x}_p+x_p=-2C\sin t+2D\cos t,$$

所以 $C=0$ 及 $D=5$，得 $x_p=5t\sin t$。因此

$$x=A\cos t+B\sin t+5t\sin t.$$

由條件 $x(0)=0$ 得 $A=0$。於是 $\dot{x}=B\cos t+5\sin t+5t\cos t$，所以 $\dot{x}(0)=B=-5$。因此

$$\boxed{x=5(t-1)\sin t}$$

至於 y，利用 $y=\frac{1}{5}(\dot{x}+2x)$ 以及 $\dot{x}=5\sin t+5(t-1)\cos t$：

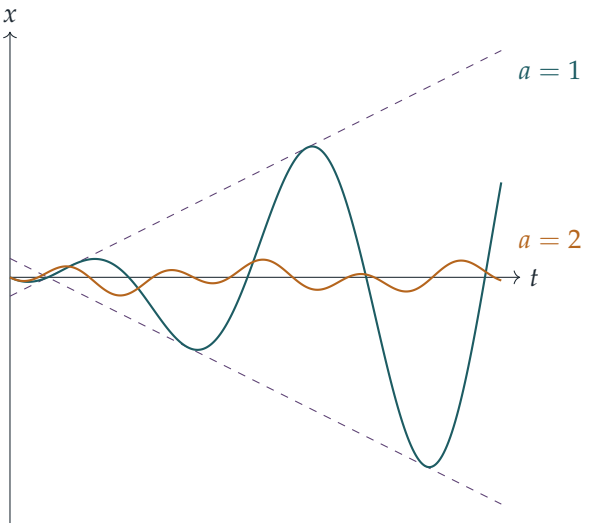
$$y=\sin t+(t-1)\cos t+2(t-1)\sin t, \qquad \text{即} \qquad \boxed{y=(t-1)\cos t+(2t-1)\sin t}$$

簡單驗算一下：$y(0)=-1$，而由 $\dot{y}=\cos t-(t-1)\sin t+2\sin t+(2t-1)\cos t$ 得 $\dot{y}(0)=1-1=0$，符合要求。

$a > 1$ 的情況

這時 $5a - 4 > 1$，所以可寫 $\omega = \sqrt{5a-4}$，其中 $\omega > 1$。方程 $\ddot{x} + \omega^2 x = 10\cos t$ 不再處於共振狀態，因為外力頻率 1 與固有頻率 ω 不同。所以：

- 餘函數是 $A\cos\omega t + B\sin\omega t$，振動週期為 $2\pi/\omega$（比 2π 短），而不再是 2π。
- 特積分（particular integral）只是 $\cos t$ 的倍數，沒有因子 t，所以不會出現 $t\sin t$ 這類項。
- 因此 x（以及 $y = \frac{1}{5}(\dot{x} + 2x)$）是頻率為 1 和 ω 的正弦型函數之和。兩者對所有 t 都保持有界（bounded），而不像 $a = 1$ 時那樣，振幅隨 t 線性增長。只有當 ω 是有理數時，運動才是週期性的；一般而言，它是兩個振動的疊加（superposition），兩者互相產生「拍」（beat）的現象。



驗算

- 把 $x = 5(t-1)\sin t$ 和 $y = (t-1)\cos t + (2t-1)\sin t$ 代回原來的兩條方程，兩者均恆等成立。逐步數值求解（由 $x = 0$、$y = -1$ 出發的四階龍格－庫塔法（Runge–Kutta））所得結果，在 $0 \le t \le 10$ 上與公式相差不超過 10^{-10}；例如 $x(10) = 45\sin 10 \approx -24.481$。
- 當 $a > 1$ 時，完整的解原來是 $x = \frac{2}{a-1}(\cos t - \cos\omega t) - \frac{5}{\omega}\sin\omega t$。當 $a \to 1$ 時，有 $\omega - 1 \approx \frac{5}{2}(a-1)$ 及 $\cos t - \cos\omega t \approx (\omega - 1)\, t\sin t$，由此重新得到 $5t\sin t - 5\sin t$。共振情況的答案正是非共振情況的極限（limit）。

常見錯誤

- 直接用 $y(0) = 0$，而沒有從 $\dot{y}(0)$ 的條件推出 $y(0) = -1$。
- 當 $a = 1$ 時試用 $C\cos t + D\sin t$ 作為特積分：它是餘函數的一部分，所以只會得出 $0 = 10\cos t$。
- 另外引入新的任意常數來獨立求解 y：一旦知道 x，y 就由 $y = \frac{1}{5}(\dot{x} + 2x)$ 完全確定。

STEP 之外

這類線性方程組其實就是 $\dot{\mathbf{v}} = M\mathbf{v} + \mathbf{f}(t)$，其中 $\mathbf{v} = (x, y)$，而 M 是常數矩陣；M 的特徵值（eigenvalue），在這裏是 $\pm\sqrt{4 - 5a}$，決定了自由運動是增長、衰減還是振動。當外力頻率與特徵值 $\pm\mathrm{i}$ 吻合時，便會出現共振，而這正好就是 $a = 1$。Boyce 與 DiPrima 所著的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材）既講解如何用矩陣處理方程組，也討論受迫振動以及共振和拍的現象。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。