詳細解答

STEP III 1987，第 4 題

純數學 • 旋轉體的體積

STEP III 1987，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

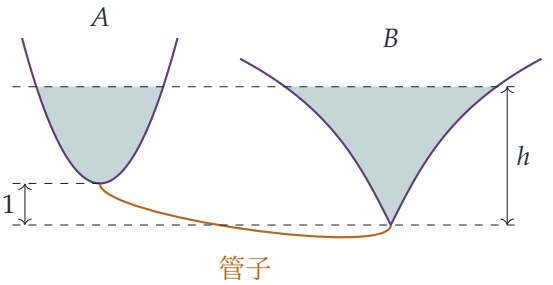
step.maths.org/questions/87-s3-q4

關鍵思路

水只是由一個漏斗流到另一個漏斗，所以水的體積守恆（conserved）。每個漏斗都是繞 y 軸旋轉而成的旋轉體（solid of revolution），因此水深為 d 時，水的體積是 $\int_0^d \pi x^2 \,\mathrm{d}y$，其中 x^2 要以 y 表示。求得兩個體積作為深度的函數之後，唯一還要小心的，就是兩個不同的基準高度：A 和 B 中的水深相差一個單位。

解答

我們假設管子的體積可以忽略不計，並把題目中第二個「closed」理解為「opened」（否則水根本無法流動）。由每個漏斗的底部起向上量度 y。



以深度表示的體積函數

對於 A，曲線為 $y = x^2$，所以在高度 y 處的水平截面是一個圓盤，面積為 $\pi x^2 = \pi y$。A 中水深為 d 時，水的體積是

$$V_A(d) = \int_0^d \pi y \,\mathrm{d}y = \frac{\pi d^2}{2}.$$

對於 B，曲線 $y = 2\sinh^{-1} x$（其中 $x > 0$）的反函數（inverse）是 $x = \sinh \frac{y}{2}$。利用 $\sinh^2 \frac{y}{2} = \frac{1}{2}(\cosh y - 1)$，$B$ 中水深為 d 時，水的體積是

$$V_B(d) = \int_0^d \pi \sinh^2 \frac{y}{2} \,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} \int_0^d (\cosh y - 1) \,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} (\sinh d - d).$$

水量守恆

開始時，A 盛有深度為 4 的水，而 B 是空的，所以總體積是

$$V_A(4) = \frac{16\pi}{2} = 8\pi.$$

最後，兩個水面都在 B 的底部之上高度 h 處。因此 B 中的水深等於 h。A 的底部比 B 的底部高一個單位，所以 A 中的水深是 $h - 1$。

> **想一想** 為甚麼兩個水面最終會處於同一高度？

兩個漏斗和管子構成一個連通而靜止的水體。水中的壓強只取決於高度，而兩個自由水面都處於大氣壓強之下，所以它們位於同一高度。題目已經告訴我們這一點，但這也解釋了為甚麼兩個水深之差恰好等於兩個底部的高度差。

水既沒有增加，也沒有減少，所以

$$\frac{\pi(h-1)^2}{2} + \frac{\pi}{2} (\sinh h - h) = 8\pi.$$

乘以 $2/\pi$ 並展開，得

$$\begin{aligned} (h-1)^2 + \sinh h - h &= 16 \\ h^2 - 2h + 1 + \sinh h - h &= 16 \\ h^2 - 3h + \sinh h &= 15, \end{aligned}$$

這就是所要求的方程。

中間一行的左方只在 $h \geq 1$ 時才是合理的模型，因為這時 A 才真正盛有水。在這個範圍內，它的導數 $2(h-1) + \cosh h - 1$ 是正數，所以方程恰好有一個符合題意的根。數值上 $h \approx 3.33$，所以 A 中的水深由 4 降至約 2.33。

驗算

- 以二分法（bisection）求得 $h \approx 3.3272$。於是 $V_A(h-1) + V_B(h) \approx 25.1327$，與 $8\pi \approx 25.1327$ 吻合。
- 對 $\int_0^d \pi \sinh^2(y/2)\,\mathrm{d}y$ 使用辛普森法則（Simpson's rule），所得結果在多個 d 值下都與 $\frac{\pi}{2}(\sinh d - d)$ 一致（例如 $d = 1.7$ 時，兩種方法都得出 1.48540）。
- 合理性：$h - 1 < 4$，所以 A 中的水位下降了；水從中流出，水位理應下降。

常見錯誤

- 在兩個漏斗中都用深度 h，忘記了 A 的底部高出一個單位。這樣會得出 $h^2 - h + \sinh h = 16$。
- 對 $\pi y^2\,\mathrm{d}x$ 積分（即繞 x 軸旋轉），而不是對 $\pi x^2\,\mathrm{d}y$ 積分。
- 把 $y = 2\sinh^{-1} x$ 的反函數寫成 $x = 2\sinh y$ 或 $x = \frac{1}{2}\sinh y$。正確的反函數是 $x = \sinh\frac{y}{2}$。

STEP 之外

最後的方程把多項式和雙曲函數（hyperbolic function）混在一起，所以沒有閉合形式（closed-form）的解，必須用數值方法求解；而上面的單調性（monotonicity）論證，正好保證了二分法或牛頓–拉弗森法（Newton–Raphson）之類的方法能找到那個唯一具物理意義的根。大學一年級的數值分析（numerical analysis）會利用介值定理（intermediate value theorem）和收斂速度（convergence rate）把這一點嚴格化。至於背後的分析學，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。