詳細解答

STEP III 1987，第 3 題

純數學 • 輻角與梅欽公式

STEP III 1987，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/87-s3-q3

本題在 *Beyond STEP* 第 5.1 節梅欽公式中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/machin.html

關鍵思路

兩部分都建基於複數（complex number）的極式（polar form）。在 (i) 中，點 $(|x|, |y|)$ 與原點的距離為 $|z|$，所以 $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$ 等於 $|z|$ 乘以一個餘弦值。在 (ii) 中，複數相乘時，輻角（argument）相加。因此，若由 $5-\mathrm{i}$ 和 $1+\mathrm{i}$ 這類數組成的乘積結果非常接近實數，它的輻角便會給出一條關於反正切（inverse tangent）的恆等式。唯一真正需要小心的，是輻角中 2π 的不確定性。

解答

第 (i) 部分

設 $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$。若 $r = 0$，則 $x = y = 0$，各項均為 0，故以下假設 $r > 0$。

*右邊的不等式。*兩邊均為非負數，所以只需比較兩邊的平方：

$$(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \geq x^2 + y^2 = |z|^2,$$

這是因為 $|x||y| \geq 0$。取非負平方根，得 $|z| \leq |x| + |y|$，等號成立當且僅當 $x = 0$ 或 $y = 0$。

*左邊的不等式。*點 $(|x|, |y|)$ 位於閉第一象限內，與原點的距離為 r，所以存在角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 使得

$$|x| = r\cos\varphi, \qquad |y| = r\sin\varphi.$$

於是，由複角公式（compound-angle formula），

$$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha = r(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha) = r\cos(\alpha-\varphi) \le r = |z|,$$

因為對任意實數 α 都有 $\cos(\alpha-\varphi) \le 1$。這就證明了兩條不等式。左邊的等號在 $\alpha = \varphi + 2k\pi$ 時成立，即 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 與 $(|x|, |y|)$ 方向相同之時。

（左邊不等式的另一證法：由柯西–施瓦茲不等式（Cauchy–Schwarz inequality），$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha \le \sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = |z|$。）

第 (ii) 部分：第一條公式

逐步展開：

$$\begin{aligned}(5-\mathrm{i})^2 &= 25 - 10\mathrm{i} - 1 = 24 - 10\mathrm{i},\\ (5-\mathrm{i})^4 &= (24-10\mathrm{i})^2 = 576 - 480\mathrm{i} - 100 = 476 - 480\mathrm{i},\\ (5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i}) &= 476 + 476\mathrm{i} - 480\mathrm{i} + 480 = 956 - 4\mathrm{i} = 4(239-\mathrm{i}).\end{aligned}$$

現在比較輻角。設 $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{5}$。由於 $5-\mathrm{i}$ 位於第四象限，它的輻角為 $-\theta$，而 $1+\mathrm{i}$ 的輻角為 $\frac{\pi}{4}$。同理，$4(239-\mathrm{i})$ 的輻角為 $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$。複數相乘時輻角相加，但可能相差 2π 的整數倍，所以

$$\frac{\pi}{4} - 4\theta = -\tan^{-1}\frac{1}{239} + 2k\pi \quad \text{對於某個整數} k.$$

想一想 我們怎樣知道 $k = 0$？

我們估計兩邊的範圍。由於當 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 時 $\tan t > t$，我們有 $0 < \theta < \frac{1}{5}$，所以 $\frac{\pi}{4} - 4\theta$ 介乎 $\frac{\pi}{4} - \frac{4}{5} > -1$ 與 $\frac{\pi}{4} < 1$ 之間。另外，$-\tan^{-1}\frac{1}{239}$ 介乎 -1 與 0 之間。$(-1,1)$ 內的兩個數相差小於 $2 < 2\pi$，所以 $2k\pi = 0$，即 $k = 0$。整理後得

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239},$$

正是所要證明的結果。

第 (ii) 部分：第二條公式

按同樣的道理，我們需要一個乘積，其輻角為

$$\frac{\pi}{4} - 3\tan^{-1}\frac{1}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{20} - \tan^{-1}\frac{1}{1985},$$

即 $(4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i})(1985-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$，並希望它是一個正實數。把因子 $1985-\mathrm{i}$ 留到最後：

$$\begin{aligned}(4-\mathrm{i})^2 &= 16-8\mathrm{i}-1 = 15-8\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3 &= (15-8\mathrm{i})(4-\mathrm{i}) = 60-15\mathrm{i}-32\mathrm{i}-8 = 52-47\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i}) &= 1040-52\mathrm{i}-940\mathrm{i}-47 = 993-992\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) &= 993+993\mathrm{i}-992\mathrm{i}+992 = 1985+\mathrm{i}.\end{aligned}$$

所以到目前為止的乘積是 $1985+\mathrm{i}$，而最後一個因子 $1985-\mathrm{i}$ 正是它的共軛（conjugate）：整個乘積為 1985^2+1，是正實數。換一個等價的做法，不乘最後一個因子，直接比較輻角：

$$\frac{\pi}{4}-3\varphi-\psi = \tan^{-1}\frac{1}{1985}+2k\pi, \qquad \varphi=\tan^{-1}\frac{1}{4},\ \psi=\tan^{-1}\frac{1}{20}.$$

同樣有 $k=0$：由於 $0<\varphi<\frac14$ 及 $0<\psi<\frac{1}{20}$，左邊介乎 $\frac{\pi}{4}-\frac45>-1$ 與 $\frac{\pi}{4}<1$ 之間，而右邊減去 $2k\pi$ 後位於 $(0,1)$ 內。整理後得

$$\frac{\pi}{4} = 3\tan^{-1}\frac14+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}.$$

驗算

- 模（modulus）很適合用來檢查展開的結果。$|5-\mathrm{i}|^8\,|1+\mathrm{i}|^2 = 26^4\cdot 2 = 913\,952$，而 $956^2+4^2 = 913\,952$ 亦然。同樣地，$17^3\cdot 401\cdot 2 = 3\,940\,226 = 1985^2+1$。
- 數值上，$4\tan^{-1}\frac15\approx 0.789582$，減去 $\tan^{-1}\frac{1}{239}\approx 0.004184$ 得 $0.785398\approx\frac{\pi}{4}$。另外，$3\tan^{-1}\frac14+\tan^{-1}\frac{1}{20}\approx 0.784894$，加上 $\tan^{-1}\frac{1}{1985}\approx 0.000504$ 同樣得到 $\frac{\pi}{4}$。
- 在 (i) 中，試取 $z=3-4\mathrm{i}$：不等式變成 $3\cos\alpha+4\sin\alpha\le 5\le 7$，而 $3\cos\alpha+4\sin\alpha = 5\cos(\alpha-\varphi)$ 在 $\tan\alpha=\frac43$ 時取得 5。

常見錯誤

- 把 $\arg(zw)=\arg z+\arg w$ 當作精確的等式，卻從不檢查 2π 的倍數。正是對各個反正切值的範圍估計，才令最後的等式成立。
- 以 $5+\mathrm{i}$ 代替 $5-\mathrm{i}$：這樣 $(5+\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i}) = -4+956\mathrm{i}$，結果接近純虛數而非接近實數。正負號必須選得令乘積接近實數。
- 在 (i) 中，忘記 α 是任意的，所以 $\cos\alpha$ 或 $\sin\alpha$ 可能是負數。餘弦形式可一次過處理所有 α。

STEP 之外

第一條公式是梅欽公式（Machin's formula，1706 年）。級數 $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ 在 x 很小時收斂得很快，前人把它與梅欽公式結合，以人手計算出 π 的許多位小數。尋找這類公式，其實是關於高斯整數（Gaussian integers）$a + b\mathrm{i}$ 的因式分解問題，當中 $1 + \mathrm{i}$、$5 \pm \mathrm{i}$ 和 $4 \pm \mathrm{i}$ 的表現有如質數。這是代數數論（algebraic number theory）的初步體驗。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 討論了二平方和與高斯整數，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis* 則展示了複數相乘的幾何意義。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。