詳細解答

STEP III 1987，第 2 題

純數學 • 三角函數歸約公式

> **STEP III 1987，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q2

關鍵思路

遞推公式（reduction formula）的來源，是先對「邊界項」$\cos^m x \cos nx$ 求導，再用複角公式（compound-angle formula）把 $\sin x \cos nx$ 化為含有 $\sin(n-1)x$ 的式子。有了這條公式之後，兩部分的關鍵都在於計算該邊界項在積分上下限的值：在 0 和 π 處，它會互相抵消還是保留下來，取決於奇偶性（parity）；而在 $\frac{\pi}{2}$ 處，因子 $\cos^m x$ 令它變為零。

（題目印出的公式寫作 $-\cos^m \cos nx$；應為 $-\cos^m x \cos nx$。）

解答

遞推公式

用積法則（product rule）對 $\cos^m x \cos nx$ 求導：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos^m x \cos nx) = -m\cos^{m-1} x \sin x \cos nx - n\cos^m x \sin nx.$$

第一項還不是我們想要的形式。由複角公式

$$\sin(n-1)x = \sin nx \cos x - \cos nx \sin x \quad \text{可得} \quad \sin x \cos nx = \cos x \sin nx - \sin(n-1)x.$$

代入後，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos^m x \cos nx) &= -m\cos^m x \sin nx + m\cos^{m-1} x \sin(n-1)x - n\cos^m x \sin nx \\ &= -(m+n)\cos^m x \sin nx + m\cos^{m-1} x \sin(n-1)x.\end{aligned}$$

對兩邊積分（這裏需要 $m \geq 1$ 及 $n \geq 1$，使得 $m-1, n-1$ 均為非負），

$$\cos^m x \cos nx = -(m+n)I_{m,n} + mI_{m-1,n-1},$$

即

$$(m+n)I_{m,n} = -\cos^m x \cos nx + mI_{m-1,n-1},$$

這正是所需的結果（慣常的任意常數已併入不定積分（indefinite integral）之中）。

第 (i) 部分

設 $J_{m,n} = \int_0^\pi \cos^m x \sin nx \,\mathrm{d}x$。把公式應用於 0 與 π 之間，並利用 $\cos^m \pi \cos n\pi = (-1)^m(-1)^n$，對 $m, n \geq 1$ 有：

$$(m+n)J_{m,n} = 1 - (-1)^{m+n} + mJ_{m-1,n-1}.$$

若 m 與 n 的奇偶性相同，則 $m+n$ 為偶數，邊界項消失，於是

$$J_{m,n} = \frac{m}{m+n} J_{m-1,n-1}.$$

此外，$m-1$ 與 $n-1$ 的奇偶性仍然相同，所以我們可以繼續遞推下去。

> **想一想** 這一連串的遞推會在哪裏停下來？為甚麼在那裏的值是零？

每一步都把兩個指標各減 1，所以經過 $\min(m,n)$ 步之後，其中一個指標為 0，而另一個指標因奇偶性相同，必為偶數。因此只需證明對每個偶數 $k \geq 0$，都有 $J_{k,0} = 0$ 及 $J_{0,k} = 0$。

- $J_{k,0} = \int_0^\pi \cos^k x \sin 0 \,\mathrm{d}x = 0$，因為被積函數（integrand）恆等於零。
- 對偶數 $k \geq 2$，$J_{0,k} = \int_0^\pi \sin kx \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_0^\pi = \frac{1}{k}\left(1-(-1)^k\right) = 0$。

因此，對 $\min(m,n)$ 使用歸納法（induction），可知只要 m, n 同為偶數或同為奇數，便有 $J_{m,n} = 0$。

或用其他方法：代換 $x = \pi - t$ 把 $\cos^m x$ 變為 $(-1)^m \cos^m t$，把 $\sin nx$ 變為 $-(-1)^n \sin nt$，所以 $J_{m,n} = (-1)^{m+n+1} J_{m,n}$，由此可見當 $m+n$ 為偶數時必有 $J_{m,n} = 0$。被積函數關於 $x = \frac{\pi}{2}$ 反對稱（antisymmetric）。

第 (ii) 部分

為了引入餘弦，寫 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$：

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin 3x \,\mathrm{d}x = K_{0,3} - K_{2,3}, \qquad K_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin nx \,\mathrm{d}x.$$

對 $m \geq 1$，邊界項為 $-\left[\cos^m x \cos nx\right]_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1$，因為 $\cos\frac{\pi}{2} = 0$。所以

$$(m+n)K_{m,n} = 1 + mK_{m-1,n-1} \qquad (m, n \geq 1).$$

由 $K_{0,1} = \int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x = 1$ 出發：

$$3K_{1,2} = 1 + K_{0,1} = 2, \qquad K_{1,2} = \tfrac{2}{3},$$
$$5K_{2,3} = 1 + 2K_{1,2} = \tfrac{7}{3}, \qquad K_{2,3} = \tfrac{7}{15}.$$

另外 $K_{0,3} = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$，因為 $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$。因此

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin 3x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{7}{15} = -\frac{2}{15}.$$

驗算

第 (ii) 部分可以直接用積化和差公式（product-to-sum formulae）計算：$\sin^2 x \sin 3x = \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{4}(\sin 5x + \sin x)$，它在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的積分為 $\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} + 1\right) = -\frac{2}{15}$。答案為負數是合理的：在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 上 $\sin 3x < 0$，而這正是 $\sin^2 x$ 最大的地方。用辛普森法則（Simpson's rule）算得 -0.133333，並且對許多 m, n 以數值方法驗證了遞推公式和第 (i) 部分。

常見錯誤

- 在 (ii) 中嘗試使用代換 $x = \frac{\pi}{2} - t$：它把 $\sin^2 x$ 變為 $\cos^2 t$，卻把 $\sin 3x$ 變為 $-\cos 3t$，所以該積分並不屬於 $I_{m,n}$ 的形式。
- 忘記遞推公式只適用於 $m, n \geq 1$，所以 (i) 中的一連串遞推需要另外處理有一個指標等於 0 的基本情況（base case）。

STEP 之外

像這樣的遞推公式，只是一個更大的故事的開端：三角函數乘積在一整個週期上的積分，正是傅立葉級數（Fourier series）背後的正交關係（orthogonality relations）；在那裏，像 (i) 中那樣的對稱性論證，讓人一眼就能判斷哪些係數會消失。Boyce 與 DiPrima 所著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）對傅立葉級數及其在求解微分方程（differential equation）上的應用，有一段淺白易讀的介紹。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。