詳細解答

# STEP III 1987，第 15 題

概率與統計 • 期望成本的最優化

> **STEP III 1987，第 15 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q15

## 關鍵思路

與其直接求 $E_n$ 的最小值，不如看看多做一次測試會帶來甚麼改變。比較「做完 $n$ 次便停」與「做完 $n+1$ 次便停」這兩個策略時，只有至今已得到 $n$ 次陽性結果的病人才有分別。對這些病人來說，多做一次測試要花 £10，而若病人患的是 Steppe 綜合症而測試結果呈陰性，便可省下 £100 的治療費。因此一切取決於 $E_{n+1} - E_n$ 的正負號，而這個正負號最多只會改變一次。

## 解答

設 $F$ 為病人患上 Fenland 熱病的事件 (event)，故 $\mathrm{P}(F) = p$，並設 $S = F'$ 為患上 Steppe 綜合症。我們假設 Steppe 病人的各次測試結果互相獨立 (independent)，每次呈陽性的概率為 $q$，其中 $0 < q < 1$。不論誰接受治療，治療費都是 £100。

### 第 (i) 部分

求 $E_n$。若病人患的是 $F$，每次測試都呈陽性。因此 $n$ 次測試全部都要做，然後再接受治療，費用為 $10n + 100$。

若病人患的是 $S$，第 $k$ 次測試（其中 $1 \le k \le n$）只會在首 $k-1$ 次測試全部呈陽性時才進行，其概率為 $q^{k-1}$。因此測試次數的期望值（expected value）為

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

而病人只會在 $n$ 次測試全部呈陽性時才接受治療，其概率為 $q^n$。根據期望值的線性性質

（linearity of expectation），

$$E_n = p\,(10n + 100) + (1 - p)\left(\frac{10(1 - q^n)}{1 - q} + 100q^n\right).$$

由此亦得 $E_0 = 100$，這正合預期，因為此時所有人都接受治療。

*差值。* $F$ 的部分增加了 10。在 $S$ 的部分，$\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = q^n$，所以

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= 10p + (1 - p)(10q^n + 100q^{n+1} - 100q^n) \\ &= 10p + 10(1 - p)q^n(1 + 10q - 10) \\ &= 10p - 10(1 - p)q^n(9 - 10q), \end{aligned}$$

這正是所要證明的結果。

解讀這個結果：有 $p$ 的概率，第 $n+1$ 次測試白白用在熱病病人身上。有 $(1 - p)q^n$ 的概率，這次測試用在 Steppe 病人身上，要花 £10，但它有 $1 - q$ 的概率可省下 £100。期望淨節省為 $100(1 - q) - 10 = 10(9 - 10q)$。

*代入數值。* 記 $D_n = E_{n+1} - E_n$。當 $p = 10^{-4}$ 及 $q = 10^{-2}$ 時，$9 - 10q = 8.9$ 而 $1 - p = 0.9999$，所以

$$D_n = 10^{-3} - 89 \times 0.9999 \times 10^{-2n}.$$

**想一想** 為甚麼只需找出 $D_n$ 在何處變號便已足夠？

這裏 $9 - 10q > 0$，而 $q^n$ 隨 $n$ 增大而嚴格遞減（strictly decreasing），所以 $D_n$ 隨 $n$ 嚴格遞增。因此當 $D_n < 0$ 時數列（sequence）$E_n$ 下降，一旦 $D_n > 0$ 便上升，而最小值出現在第一個使 $D_n > 0$ 的 $n$。現在

$$\begin{aligned} D_2 &= 10^{-3} - 0.0088991 < 0, \\ D_3 &= 10^{-3} - 0.000088991 = 0.000911\ldots > 0. \end{aligned}$$

所以 $E_0 > E_1 > E_2 > E_3$ 且 $E_3 < E_4 < E_5 < \cdots$，醫生應選 $n = 3$。（此時期望費用約為 £10.11，而立即治療則要 £100。）

### 第 (ii) 部分

取 $q_0 = \frac{9}{10}$，並假設 $q > \frac{9}{10}$。那麼 $9 - 10q < 0$，所以

$$D_n = 10p + 10(1 - p)q^n(10q - 9).$$

對任意 $p \in [0, 1]$，這兩項都是非負的。它們不可能同時為零：若 $p > 0$，第一項為正；若 $p = 0$，第二項為 $10q^n(10q - 9) > 0$。因此對任意 $n \geq 0$ 都有 $D_n > 0$，即

$$E_0 < E_1 < E_2 < \cdots.$$

不論 $p$ 取何值，醫生都應選 $n = 0$，立即治療。

這個 $q_0$ 的值不能再調低。若 $q < \frac{9}{10}$，則當 $p$ 足夠小時，$D_0 = 10p - 10(1-p)(9-10q)$ 為負，所以至少測試一次會比 $n = 0$ 更好。用文字來說，當 $q > \frac{9}{10}$ 時，Steppe 病人的測試呈陰性的機會不足十分之一，所以即使未把熱病病人計算在內，一次 £10 的測試平均省下的治療費也不足 £10。

## 驗算

- 直接計算 $n = 1$：$E_1 = 10 + 100\big(p + (1-p)q\big)$。取 $p = 0$ 得 $E_1 - E_0 = 10 - 100(1-q)$，與公式給出的 $-10q^0(9-10q)$ 吻合。
- 當 $p = 10^{-4}$ 及 $q = 10^{-2}$ 時，公式給出 $E_0 = 100$、$E_1 \approx 11.010$、$E_2 \approx 10.1210$、$E_3 \approx 10.11309$ 及 $E_4 \approx 10.11400$。最小值出現在 $n = 3$，與上面所得一致。
- 以分數作精確枚舉，已就數百組隨機的 $(p, q)$ 及 $n \le 8$ 驗證了 $E_n$ 的公式和差值恆等式；另外以 $p = 0.3$、$q = 0.5$、$n = 2$ 進行模擬，得出平均費用為 63.98，而精確值為 64。

## 常見錯誤

- 向 Steppe 病人收取全部 $n$ 次測試的費用。整個過程在第一次出現陰性結果時便停止，所以第 $k$ 次測試只有 $q^{k-1}$ 的概率會進行。
- 找出第一個使 $D_n > 0$ 的 $n$，卻沒有說明 $D_n$ 為何是單調的（monotonic）。少了這一步，數列 $E_n$ 原則上有可能在之後再次下降。
- 在第 (ii) 部分忘記了 $p = 0$ 的情況。正因為這個情況，條件才是 $q > q_0$ 而不是 $q \ge q_0$：當 $q = \frac{9}{10}$ 且 $p = 0$ 時，每個 $E_n$ 都等於 100。

## STEP 之外

這是最優停止（optimal stopping）和決策論（decision theory）的一個小例子：一連串帶有成本的行動、一個隨機的狀態，以及一條決定何時停止的法則。比較相鄰的策略（即「邊際分析」(marginal analysis)），並證明差值只變號一次，是處理這類問題的標準方法。這些想法會進一步通往貝葉斯決策論（Bayesian decision theory）和動態規劃（dynamic programming）。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）涵蓋了支撐這些理論的條件期望（conditional expectation）工具。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。