詳細解答

STEP III 1987，第 14 題

力學 • 引力坍縮

> **STEP III 1987，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q14

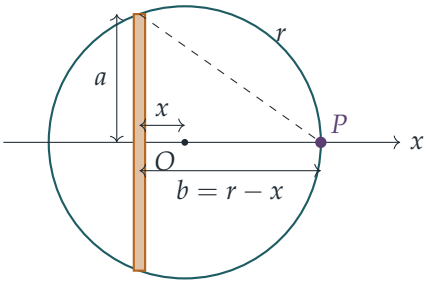
關鍵思路

實心球體可視為一疊薄圓盤，因此整個球體所施的力，就是把題目給出的圓盤公式沿着穿過質點（particle）的軸線積分。那個平方根看似麻煩，但只要留意到，當質點位於球面上時，根號內的式子可以因式分解，問題便迎刃而解。之後，關於雲團的部分就是牛頓第二定律（Newton's second law）配合鏈式法則（chain rule）$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$，而代換（substitution）$r = R\cos^2\alpha$ 的用意，正是要整理第二次積分時出現的平方根。

解答

球面上的力

把球心置於原點，質點 P 置於 x 軸上 $x = r$ 之處。把球體切成與軸線垂直的圓盤。位於 x 處的薄片（其中 $-r \le x \le r$）厚度為 δx，半徑為 a，其中 $a^2 = r^2 - x^2$，而 P 位於該薄片的軸線上，與它相距 $b = r - x \ge 0$。



關鍵的化簡在於平方根：

$$a^2 + b^2 = (r^2 - x^2) + (r - x)^2 = 2r^2 - 2rx = 2r(r - x),$$

所以

$$\frac{b}{(a^2 + b^2)^{1/2}} = \frac{r - x}{\sqrt{2r(r - x)}} = \sqrt{\frac{r - x}{2r}}.$$

每個圓盤都沿軸線把 P 拉向球心，因此各個力的方向相同，直接相加即可。令 $\delta x \to 0$，合力為

$$\begin{aligned} F &= 2\pi mk\rho \int_{-r}^{r} \left(1 - \sqrt{\frac{r - x}{2r}}\right) \mathrm{d}x \\ &= 2\pi mk\rho \left(2r - \frac{1}{\sqrt{2r}} \int_0^{2r} u^{1/2}\, \mathrm{d}u\right) \qquad (u = r - x) \\ &= 2\pi mk\rho \left(2r - \frac{1}{\sqrt{2r}} \cdot \tfrac{2}{3}(2r)^{3/2}\right) = 2\pi mk\rho \left(2r - \tfrac{4}{3}r\right) = \tfrac{4}{3}\pi mk\rho\, r. \end{aligned}$$

球體的質量為 $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$，所以 $\frac{4}{3}\pi\rho = M/r^3$，於是

$$F = \frac{kmM}{r^2},$$

方向指向球心，正如題目所求。

雲團的運動方程

把雲團中的質點看成一個質量為 M 的連續均勻球體，並考慮球面上一個質量為 m、與球心相距 r 的質點。根據上面的結果，它所受的唯一的力是指向球心的 kmM/r^2。取 r 為坐標（以向外為正），由牛頓第二定律得

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{kmM}{r^2}.$$

現在 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v$，所以 $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，而根據鏈式法則，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}.$$

因此 $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$，約去 m 後得

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{kM}{r^2}.$$

想一想 圓盤的結果是針對固定的球體而得出的。為甚麼可以把它用於正在坍縮的雲團？

任何一刻的力，只取決於該刻質量的分佈，所以我們需要雲團始終保持為均勻球體，而且球面以內的質量始終是 M。事實正是如此：一個從半徑 λR 處由靜止開始運動的質點（其中 $0 < \lambda \leq 1$），其內側的質量為 $\lambda^3 M$，而只要 $r(t)$ 滿足 $\ddot{r} = -kM/r^2$，$\lambda r(t)$ 便滿足 $\ddot{s} = -k\lambda^3 M/s^2$。所以每個質點與球心的距離，始終是球面半徑的同一個比例：雲團按均勻的比例因子收縮，保持均勻，而且沒有質點會越過球面上的質點。（質點外側的質量只會對內部的質點有影響，而球面之外並無任何質點。）

由靜止開始的坍縮

分離變數（separate the variables），並由 $r = R$（該處 $v = 0$）起積分：

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \int_R^r -\frac{kM}{s^2}\,\mathrm{d}s = kM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{kM(R-r)}{rR}.$$

加速度始終向內，而雲團由靜止開始，所以 r 一直遞減，全程 $v \geq 0$。

現在代入 $r = R\cos^2\alpha$，當 r 由 R 向 0 遞減時，α 由 $t = 0$ 時的 0 向 $\frac{\pi}{2}$ 遞增。這時 $R - r = R\sin^2\alpha$，所以

$$v^2 = \frac{2kM\,R\sin^2\alpha}{R^2\cos^2\alpha} = \frac{2kM}{R}\tan^2\alpha, \qquad v = \left(\frac{2kM}{R}\right)^{1/2}\tan\alpha,$$

這裏取正根，因為 $v \geq 0$，而且當 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ 時 $\tan\alpha \geq 0$。

想一想 怎樣由 v 作為 α 的函數，得出 t 作為 α 的函數？

利用 $v = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = -2R\cos\alpha\sin\alpha$：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2R\sin\alpha\cos\alpha}{(2kM/R)^{1/2}\tan\alpha} = \left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2} 2\cos^2\alpha = \left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2}(1+\cos 2\alpha).$$

積分，並利用 $\alpha = 0$ 時 $t = 0$，得

$$t = \left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2}\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right),$$

這就是 $r = R\cos^2\alpha$ 的時刻，正如題目所求。

驗算

- 時間很短時：當 α 很小，$t \approx 2\alpha(R^3/2kM)^{1/2}$ 而 $R - r \approx R\alpha^2$，所以 $R - r \approx \frac{1}{2}(kM/R^2)\,t^2$：即由靜止開始、加速度為常數 kM/R^2 的運動，與起初階段的預期完全吻合。
- 令 $\alpha \to \frac{\pi}{2}$，得出整個坍縮所需的時間為 $\frac{\pi}{2}(R^3/2kM)^{1/2}$；即使 $v \to \infty$，這個時間仍是有限的。

- 數值上，把 200 000 個薄圓盤的力相加，所得結果與 kmM/r^2 的相對誤差約為 2×10^{-9}。取 $k = 1.7$、$M = 2.3$、$R = 1.9$，對 $\ddot{r} = -kM/r^2$ 逐步作數值計算，直至 $\alpha = 0.8$ 所對應的時刻，得 $r = 0.922260$，與 $R\cos^2 0.8 = 0.922260$ 吻合。

常見錯誤

- 由球心而非由質點量度 b：應為 $b = r - x$，而不是 x。
- 忘記 v 是向內的速率，這會令 $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$ 中的正負號相反。
- 為 v 取了負平方根，結果算出的時間是負數。

STEP 之外

第一部分是牛頓（Newton）球殼定理（shell theorem）的特殊情況：在球對稱物體之外，引力的作用就如全部質量都集中在球心一樣。大學課程會用引力的高斯定律（Gauss's law）$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$ 簡潔地證明它。你求得的坍縮時間，就是天體物理學家所說的*自由落體時間*（free-fall time），用來估算氣體雲坍縮形成恆星有多快；而以 α 作參數的表示法，也正是描述徑向開普勒（Kepler）軌道的那一個。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是以這種方式處理有心力（central force）和球殼定理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。