詳細解答

STEP III 1987，第 13 題

力學 • 涉及摩擦力的轉動桿

> **STEP III 1987，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q13

關鍵思路

只要質點仍緊貼在桿上不滑動，桿與質點便作為一個剛體（rigid body）一同繞鉸鏈轉動，因此以整體的轉動慣量（moment of inertia）應用能量守恆（conservation of energy），即可立刻求得 $\dot{\theta}^2$。要找出何時開始滑動，我們再單獨考慮質點：它繞鉸鏈作圓周運動，所以在徑向和橫向應用牛頓第二定律（Newton's second law），便能準確知道桿須提供多大的摩擦力（friction）和法向反作用力（normal reaction）。當所需的摩擦力達到法向反作用力的 $\frac{1}{2}$ 時，滑動便開始。

解答

運動方程

把桿視為繞光滑鉸鏈 O 轉動的均勻剛性桿，並把質點視為與 O 相距 a 的質點。在質點滑動之前，它一直與 O 保持距離 a，並隨桿一同轉動。

系統對 O 的轉動慣量為

$$I = \tfrac{4}{3}(3m)a^2 + ma^2 = 4ma^2 + ma^2 = 5ma^2,$$

這裏用了長度為 $2l$ 的均勻桿對其一端的轉動慣量 $\frac{4}{3}Ml^2$。

鉸鏈是光滑的，而質點與桿之間的摩擦力和法向反作用力都是系統的內力，所以它們所作的淨功為零。當桿轉過角度 θ 時，桿的中心和質點（兩者與 O 的距離均為 a）各下降了 $a\sin\theta$。由於系統從靜止開始運動，能量守恆給出

$$\tfrac{1}{2}(5ma^2)\dot{\theta}^2 = 3mg\,a\sin\theta + mg\,a\sin\theta = 4mga\sin\theta,$$

即

$$5a\dot{\theta}^2 = 8g\sin\theta,$$

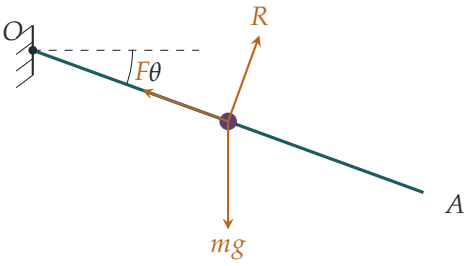
這正是所要證明的結果。對 t 求導得 $10a\dot{\theta}\ddot{\theta} = 8g\cos\theta\,\dot{\theta}$，所以（當 $\dot{\theta} \neq 0$ 時，而運動一旦開始這便成立）

$$a\ddot{\theta} = \tfrac{4}{5}g\cos\theta.$$

（對 O 取力矩也可得到同樣的結果：$5ma^2\ddot{\theta} = 4mga\cos\theta$。）

質點何時滑動

現在單獨考慮質點。作用在它身上的力有：重量 mg、垂直於桿的法向反作用力 R，以及沿桿方向的摩擦力 F。由於質點在以 O 為圓心、半徑為 a 的圓上運動，它的加速度有一個沿桿指向 O 的分量 $a\dot{\theta}^2$，以及一個垂直於桿、沿 θ 增加方向的分量 $a\ddot{\theta}$。



我們取 F 沿桿指向 O，稍後會看到這正是質點所需的方向。沿桿方向分解，以指向 O 為正：重量有一個背離 O 的分量 $mg\sin\theta$，所以

$$F - mg\sin\theta = ma\dot{\theta}^2 = \tfrac{8}{5}mg\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad F = \tfrac{13}{5}mg\sin\theta.$$

垂直於桿方向分解，以 θ 增加的方向（即由桿向下）為正：重量的分量為 $mg\cos\theta$，所以

$$mg\cos\theta - R = ma\ddot{\theta} = \tfrac{4}{5}mg\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad R = \tfrac{1}{5}mg\cos\theta.$$

想一想 重力看來是把質點沿斜面向下拉，為甚麼質點反而需要指向鉸鏈的摩擦力？

起作用的不只是重力：質點要繼續繞 O 作圓周運動，就需要一個指向 O 的淨力 $ma\dot{\theta}^2$。重力沿桿的分量卻指向相反方向，即背離 O，所以摩擦力既要提供向心力（centripetal force），又要抵銷重力的分量。這就是為甚麼 F 算出來是指向 O 為正，並且隨 $\sin\theta$ 增長；而 R 很小，是因為桿正在質點下方「墜離」（在 $\theta = 0$ 時，質點有向下的加速度 $\frac{4}{5}g$，所以桿只承托它重量的 $\frac{1}{5}$）。

當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 時，F 和 R 均為正，所以質點一直與桿保持接觸。只要 $F \le \frac{1}{2}R$，質點便相對於桿保持靜止，即

$$\tfrac{13}{5}mg\sin\theta \le \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}mg\cos\theta \iff \tan\theta \le \tfrac{1}{26}.$$

在 $\theta = 0$ 時，我們有 $F = 0 < \frac{1}{2}R$，而 $F/R = 13\tan\theta$ 隨 θ 遞增，所以質點最初開始滑動（向外，背離鉸鏈）是在

$$\tan\theta = \tfrac{1}{26},$$

之時，這正是所要證明的結果。

驗算

- 在 $\theta = 0$ 時，力矩方程給出角加速度（angular acceleration）$\frac{4g}{5a}$；所以質點的加速度為 $\frac{4}{5}g$，小於 g，這與 $R = \frac{1}{5}mg > 0$ 一致。
- 以數值方法逐步計算剛體運動（取 $g = 9.81$，$a = 0.7$），所得結果與 $5a\dot\theta^2 = 8g\sin\theta$ 吻合，誤差在 10^{-12} 以內；而直接由質點的計算加速度求得的摩擦力和反作用力，亦與 $\frac{13}{5}mg\sin\theta$ 和 $\frac{1}{5}mg\cos\theta$ 相符。比值 F/R 最初達到 $\frac{1}{2}$ 時，$\theta \approx 0.03845$ 弧度，即 $\arctan\frac{1}{26} \approx 2.20^\circ$。

常見錯誤

- 忘記向心項，把質點當作在斜面上處於平衡來分解力；這樣不但得出錯誤的角度，連摩擦力的方向也會弄錯。
- 正確地使用了 $\frac{1}{3}(3m)(2a)^2$，卻忘記把質點的 ma^2 加進轉動慣量。
- 像在固定斜面上那樣取 $R = mg\cos\theta$：桿正在加速，所以反作用力要小得多。

STEP 之外

這道題讓我們初嘗在轉動參考系（rotating frame）中處理問題的滋味：從桿上觀察，質點受到一個向外的「離心力」（centrifugal force）$ma\dot\theta^2$ 和一個「歐拉力」（Euler force）$-ma\ddot\theta$，而這些虛擬力（fictitious forces）正是我們求得的那些項。大學本科的力學課程會有系統地發展這套理論，並會討論質點開始滑動後出現的科里奧利力（Coriolis force）。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對剛體轉動和非慣性參考系（non-inertial frames）有十分清晰的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。