詳細解答

STEP III 1987，第 12 題

力學 • 變質量轉動

> **STEP III 1987，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q12

關鍵思路

這是一道變質量（variable mass）問題，所以不能盲目套用 $F = ma$（或它在轉動中的對應公式）。穩妥的做法是回到基本原理：比較時刻 t 與時刻 $t + \delta t$ 繞樞軸（pivot）的角動量（angular momentum），其間有少量已燃燒的燃料離開了系統。樞軸是光滑的，而重力沿鉛垂方向，所以沒有任何力對通過樞軸的鉛垂軸產生力矩（moment），因此該角動量守恆。

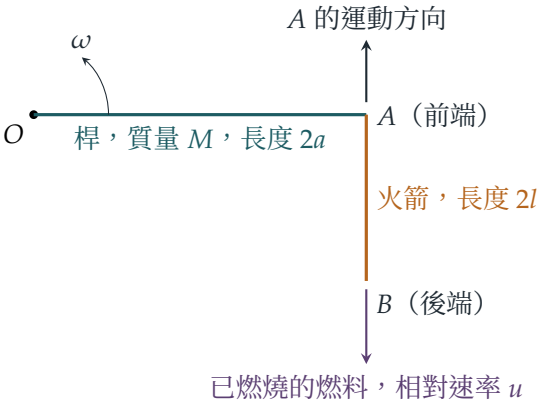
解答

建立模型

把桿和火箭都看成均勻剛體桿，在水平面上繞通過樞軸 O 的鉛垂軸轉動。設桿為 OA，其中 $OA = 2a$。取單位向量 $\mathbf{e}_r$ 沿 OA 方向，$\mathbf{e}_\theta$ 與它垂直並指向轉動的方向，又設 $\mathbf{k}$ 為鉛垂向上的單位向量，於是 $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{k}$。

火箭的前端在 A，並指向前方，即 A 的運動方向。因此火箭沿 $\mathbf{e}_\theta$ 方向放置，由 A 向後延伸至其後端 B，其中

$$\overrightarrow{OB} = 2a\,\mathbf{e}_r - 2l\,\mathbf{e}_\theta.$$



轉動慣量

桿繞其一端的轉動慣量（moment of inertia）為 $\frac{1}{3}M(2a)^2 = \frac{4}{3}Ma^2$。

火箭的中心位於 $2a\,\mathbf{e}_r - l\,\mathbf{e}_\theta$，與 O 的距離為 $\sqrt{4a^2+l^2}$。它繞自身中心的轉動慣量為 $\frac{1}{3}ml^2$，所以由平行軸定理（parallel axis theorem），它的貢獻是 $\frac{1}{3}ml^2 + m(4a^2+l^2)$。總和為

$$I = \tfrac{4}{3}Ma^2 + m\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right).$$

I 如何變化

由於 $m = 2\alpha l$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\alpha\beta$，我們有 $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\beta$。用積法則（product rule）對 I 求導，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right) + m\cdot\tfrac{8}{3}l\,\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\\ &= -\alpha\beta\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right) + 2\alpha l\cdot\tfrac{8}{3}l\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\beta\right) = -\alpha\beta\,(4a^2+4l^2).\end{aligned}$$

留意 $4a^2 + 4l^2 = OB^2$：轉動慣量下降的速率，恰好等於從後端 B 移走質量時所得的速率。這是合理的，因為一枚均勻的火箭若要保持均勻，而前端又固定在 A，就只能從後端縮短。

噴出燃料的角動量

在由 t 到 $t+\delta t$ 的短時間內，有質量為 $\delta\mu = \alpha\beta\,\delta t$ 的已燃燒燃料從 B 離開。燃燒之前，它隨火箭一起運動，速度為 $\mathbf{v}_B = \omega\mathbf{k}\times\overrightarrow{OB}$。燃燒之後，它的速度是 $\mathbf{v}_B - u\,\mathbf{e}_\theta$，因為它相對於火箭是向正後方運動的。這時它繞 O 的角動量為

$$\begin{aligned}\delta\mu\,\overrightarrow{OB}\times(\mathbf{v}_B - u\,\mathbf{e}_\theta) &= \delta\mu\left[\omega\,OB^2\,\mathbf{k} - (2a\,\mathbf{e}_r - 2l\,\mathbf{e}_\theta)\times u\,\mathbf{e}_\theta\right]\\ &= \delta\mu\left[\omega(4a^2+4l^2) - 2au\right]\mathbf{k},\end{aligned}$$

其中用到 $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{0}$，以及當 $\mathbf{r}$ 垂直於 $\mathbf{k}$ 時 $\mathbf{r} \times (\omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = \omega r^2 \mathbf{k}$。

想一想 為甚麼在排氣的那一項中，$\overrightarrow{OB}$ 只有 $2a\,\mathbf{e}_r$ 這部分起作用？

排氣的相對速度沿 $\mathbf{e}_\theta$ 方向，與火箭在同一直線上。所以 $\overrightarrow{OB}$ 沿火箭方向的分量不產生力矩。無論燃料在火箭上哪一點離開，由 O 到排氣（以及推力）作用線的垂直距離都只是 $OA = 2a$。

角動量守恆

樞軸是光滑的，所以它的反作用力對通過 O 的鉛垂軸沒有力矩；重力沿鉛垂方向，所以也沒有力矩。因此整個系統（煙花連同在 δt 內燃燒的燃料）繞該軸的角動量在 t 與 $t+\delta t$ 兩個時刻相同：

$$I(t+\delta t)\,\omega(t+\delta t) + \delta\mu\left[\omega(4a^2+4l^2) - 2au\right] = I(t)\,\omega(t),$$

誤差只有 $(\delta t)^2$ 階的項。兩邊除以 δt，並令 $\delta t \to 0$，其中 $\delta\mu/\delta t = \alpha\beta$，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) + \alpha\beta\,\omega(4a^2+4l^2) - 2\alpha\beta au = 0.$$

展開 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) = I\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$，並代入 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\alpha\beta(4a^2+4l^2)$，兩個含 ω 的項恰好互相抵消，餘下

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 2\alpha\beta au.$$

這正是「轉動慣量 × 角加速度 = 推力的力矩」：推力（thrust）為 $\alpha\beta u$，沿火箭方向作用，與 O 的垂直距離為 $2a$。最後，

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{2\alpha\beta au}{\frac{4}{3}Ma^2 + 2\alpha l\left(4a^2 + \frac{4}{3}l^2\right)} = \frac{6\alpha\beta au}{4Ma^2 + 8\alpha l(3a^2+l^2)}$$
$$= \frac{3\alpha\beta au}{2\left[Ma^2 + 2\alpha l(3a^2+l^2)\right]},$$

正如所求。只要還有燃料剩下，即 $l > 0$，這個結果就成立。

驗算

- 沒有火箭時（$l \to 0$），結果變成 $\frac{4}{3}Ma^2\,\dot{\omega} = 2a \cdot \alpha\beta u$：推力乘以力臂，與預期相符。
- 量綱：$\alpha\beta u$ 是一個力（α 是每單位長度的質量，β 是一個速率），所以分子是力 × 長度，而分母是轉動慣量。
- 數值上，取 $M = 1.3$、$a = 0.7$、$\alpha = 0.9$、$\beta = 0.4$、$u = 2.5$、$l(0) = 1.1$ 及 $\omega(0) = 0.3$，我們把運動分成多步來模擬：從後端逐一噴出 2×10^5 小塊，每次都令角動量守恆。在 $t = 4.95$ 時，這樣得出 $\omega \approx 2.39817$，而對公式積分則得出 2.39816。

常見錯誤

- 只對煙花本身寫出 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) =$ 力矩。煙花並不是封閉系統，除非你同時計及燃料帶走的角動量，否則這樣會得出錯誤的答案。
- 把排氣的絕對速度當作向後的 u，而不是相對於運動中的火箭的 u。
- 忘記 l 會改變，以致忽略了火箭的轉動慣量是透過 m 和 l 兩者而隨時間變化的。

STEP 之外

這裏的抵消是一個普遍的事實。若物體失去質量時，離開的質量帶有當地的剛體速度再加上一個相對排氣速度，則運動方程就是瞬時物體的普通運動方程，另加一個由相對速度產生的「推力」。這就是火箭方程(rocket equation)的轉動版本。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）仔細討論了變質量系統和角動量，程度正好與本題相若。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。