詳細解答

STEP III 1987，第 11 題

力學 • 相對速度的最優化

STEP III 1987，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

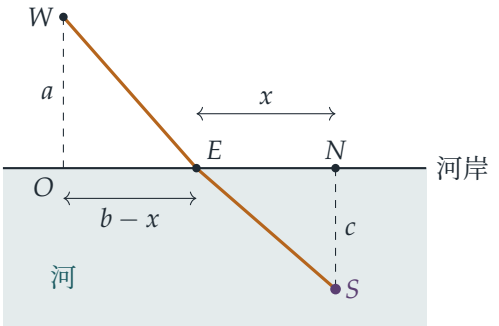
step.maths.org/questions/87-s3-q11

關鍵思路

把總時間寫成單一變數 x 的函數，然後令其導數（derivative）等於零。在靜水中，這其實就是光學中的折射（refraction）問題，答案是斯涅耳定律（Snell's law）。有水流時，唯一要多做的工夫是計算游泳時間：水流速度與她的游泳速度大小相同，所以兩者之和是一個菱形（rhombus）的對角線，游泳時間因而成為 x 的一個出奇地簡單的函數。

解答

把這名女子視為質點（particle），她在陸地上以恆定速率 u 運動，在水中則以相對於水的恆定速率 v 運動，兩段路程都沿直線進行。取河岸為 X 軸，以下游為正方向，田野為 $Y > 0$，並設女子位於 $W = (0, a)$。於是樹樁位於 $S = (b, -c)$，河岸上離樹樁最近的點是 $N = (b, 0)$，而她在 $E = (b - x, 0)$ 下水，此點在 N 的上游，距離為 x。



她跑步的距離是 $WE = \sqrt{a^2 + (b-x)^2}$，游泳的距離是 $ES = \sqrt{x^2 + c^2}$。

靜水

總時間為

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + (b-x)^2}}{u} + \frac{\sqrt{x^2 + c^2}}{v},$$

所以

$$T'(x) = -\frac{b-x}{u\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} + \frac{x}{v\sqrt{x^2 + c^2}}.$$

函數 $s \mapsto s/\sqrt{k^2 + s^2}$ 是遞增的，所以 T' 的兩項都隨 x 增加而增加。因此 T' 嚴格遞增，T 恰好有一個駐點（stationary point），而這個駐點就是它的最小值點。由於 $T'(0) < 0 < T'(b)$，這一點位於 $0 < x < b$ 之內。所求的方程是

$$\boxed{\frac{b-x}{u\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} = \frac{x}{v\sqrt{x^2 + c^2}}}$$

或等價地 $v(b-x)\sqrt{x^2 + c^2} = ux\sqrt{a^2 + (b-x)^2}$。若以 WE 和 ES 與河岸法線（normal）所成的角 α 和 β 表示，這就是 $\dfrac{\sin\alpha}{u} = \dfrac{\sin\beta}{v}$，亦即折射的斯涅耳定律。

流動的河水

現在河水以速率 v 向下游流動，而她相對於水的游泳速率也是 v。要沿直線 ES 前進，她必須選擇一個游向（heading），與下游方向成向下的角 θ，使她相對於地面的速度沿 ES 的方向。

想一想 她沿 ES 實際移動得有多快？為甚麼她必須在樹樁的上游下水？

她相對於地面的速度是水流速度加上她的游泳速度：

$$v\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix} = 2v\cos\tfrac{\theta}{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\-\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},$$

這裏用了 $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ 和 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$。從幾何上看，兩個速度的長度相等，所以它們構成一個菱形，而兩者之和平分它們之間的夾角。因此她相對於地面的路徑與下游方向成向下的角 $\phi = \theta/2$。因為 $0 \le \theta \le \pi$，我們有 $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$，所以她只能向下游漂移：樹樁必須在 E 的下游，即 $x > 0$。要使路徑沿着 ES，我們需要

$$\tan\phi = \frac{c}{x}, \qquad \text{所以} \qquad \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + c^2}},$$

而她沿 ES 的速率是 $2v\cos\phi = \dfrac{2vx}{\sqrt{x^2 + c^2}}$。游泳時間等於距離除以速率：

$$\frac{\sqrt{x^2 + c^2}}{2vx/\sqrt{x^2 + c^2}} = \frac{x^2 + c^2}{2vx}.$$

所以總時間為

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}{u} + \frac{x^2+c^2}{2vx} = \frac{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}{u} + \frac{1}{2v}\left(x + \frac{c^2}{x}\right), \qquad x > 0,$$

而

$$T'(x) = -\frac{b-x}{u\sqrt{a^2+(b-x)^2}} + \frac{1}{2v}\left(1 - \frac{c^2}{x^2}\right).$$

當 $x > 0$ 時，兩項同樣隨 x 嚴格遞增。此外，當 $x \to 0^+$ 時 $T'(x) \to -\infty$，而當 x 很大時 $T'(x) > 0$，所以恰好有一個駐點，並且它給出最短時間。令 $T'(x) = 0$，再乘以 $2vx^2u\sqrt{a^2+(b-x)^2}$（此式為正），得

$$2vx^2(b-x) = u(x^2-c^2)[a^2+(b-x)^2]^{\frac{1}{2}},$$

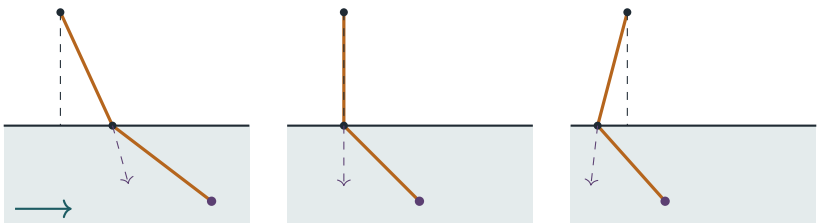
這正是所要求的結果。

三幅草圖

不必解這個方程，也能從中看出 x 的位置。因子 $[a^2+(b-x)^2]^{1/2}$ 是正數，所以 $b-x$ 和 $x-c$ 必須同號（或同時為零）。

- $b > c$：這時 $c < x < b$。假如 $x \le c$，便會有 $b-x > 0 \ge x-c$；假如 $x \ge b$，便會有 $b-x \le 0 < x-c$；兩者都不可能。她在 $b-x > 0$ 處下水，位於 O 的下游，而該點是河岸上離她最近的點。由於 $x > c$，她的游泳路徑與河岸所成的角 $\phi < 45°$，而她的游向 $\theta = 2\phi < 90°$ 偏向下游。
- $b = c$：這時按同樣的論證可得 $x = c = b$。她直接跑到 O，然後正對着對岸橫渡（$\theta = 90°$），水流則帶着她沿一條與河岸成 $45°$ 的路徑前進。
- $b < c$：這時 $b < x < c$，所以 $b-x < 0$。她要向上游跑去下水，沿一條比 $45°$ 更陡的路徑游泳，而她的游向 $\theta > 90°$ 部分指向上游。

以下草圖按比例繪畫，取 $a = 3$、$c = 2$、$u = 2$、$v = 1$，以及 $b = 4, 2, 1$。數值上，$x \approx 2.62$、$x = 2$ 和 $x \approx 1.79$。水流向右；E 處的虛線箭頭表示她相對於水的游向。



$b > c$　　$b = c$　　$b < c$

驗算

- 若 $b = c$，則 $x = c$ 使題目所給方程的兩邊都等於零，與上面所得一致。
- 正對着對岸橫渡（$\theta = 90°$）：她每橫渡 v，便向下游漂移 v，所以路徑成 45°。公式給出速率 $2v\cos 45° = \sqrt{2}\,v$，路徑長度為 $\sqrt{2}\,c$，所以時間是 c/v，這顯然是應有的結果。
- 根據算術平均—幾何平均不等式（AM–GM），游泳時間 $(x^2 + c^2)/(2vx)$ 在 $x = c$ 時最小。這是合理的：假如跑步不花任何時間，她會在 N 上游距離 c 處下水，然後正對着對岸橫渡。
- 數值上，對 a, b, c, u, v 的 2000 組隨機取值直接求 T 的最小值，所得的最小值點每次都滿足兩個方程，而且在第二種情況下都位於 b 與 c 之間。逐步模擬她在水流中游泳的過程，亦驗證了游泳時間。例如，$a = 3$、$b = 4$、$c = 2$、$u = 2$、$v = 1$ 給出 $x \approx 2.621$。

常見錯誤

- 把水流速率直接加到她的速率上，彷彿她是對準樹樁直游過去。她必須偏着游，使合速度（resultant velocity）指向樹樁。
- 忘記了有水流時只有 $x > 0$ 才可能：由於兩個速率相等，她根本無法逆流而上。
- 過早把關於 x 的方程兩邊平方。這樣會失去正負號的資訊，而正是這些資訊把 x 定在 b 與 c 之間。

STEP 之外

第一個答案是斯涅耳定律，它源自費馬原理（Fermat's principle）：光沿所需時間最短的路徑行進。選擇整條路徑以使時間最短，正是變分法（calculus of variations）所研究的課題。與此密切相關的是策梅洛（Zermelo）導航問題：水流因地而異，如何駕駛一艘船穿越其中，才能最快到達目的地。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對相對速度和運動參考系有細緻的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。