詳細解答

STEP III 1987，第 10 題

純數學 • 伯努利多項式

> **STEP III 1987，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q10

關鍵思路

定義規則只透過導數（derivative）來確定 P_n，因此最自然的做法，是對差式 $P_n(x+1) - P_n(x) - nx^{n-1}$ 的導數運用歸納法（induction）：歸納假設令它變為零，於是只剩下一個常數，而積分條件就把這個常數確定下來。之後，所求的和是一個裂項和（telescoping sum）；至於立方和，我們只需要求出 P_4 除常數項以外的部分，反正常數項會互相抵消。

解答

差分恆等式

對 $n \geq 1$，設

$$Q_n(x) = P_n(x+1) - P_n(x) - nx^{n-1}.$$

我們用歸納法證明：對所有 x，$Q_n(x) = 0$。

基礎情況 $n = 1$。由於 $P_1' = 1 \cdot P_0 = 1$，故對某個常數 c 有 $P_1(x) = x + c$。於是 $P_1(x+1) - P_1(x) = 1 = 1 \cdot x^0$，所以 $Q_1 \equiv 0$。（事實上，由 $\int_0^1 (x+c)\,\mathrm{d}x = 0$ 可得 $c = -\frac{1}{2}$，但我們用不着它。）

歸納步驟。假設 $n \geq 2$ 且 $Q_{n-1} \equiv 0$。求導，並利用 $P_n' = nP_{n-1}$，得

$$\begin{aligned} Q_n'(x) &= nP_{n-1}(x+1) - nP_{n-1}(x) - n(n-1)x^{n-2} \\ &= n[P_{n-1}(x+1) - P_{n-1}(x) - (n-1)x^{n-2}] \\ &= nQ_{n-1}(x) = 0. \end{aligned}$$

所以 Q_n 是常數，並且等於它在 $x = 0$ 的值。因為 $n \geq 2$，nx^{n-1} 這一項在 $x = 0$ 時為

零，所以

$$Q_n(0) = P_n(1) - P_n(0).$$

> **想一想** 我們怎樣知道 $P_n(1) = P_n(0)$？積分條件說的是 P_n 的積分，而不是它在個別點的取值。

把積分條件用在低一級的多項式上。根據微積分基本定理（fundamental theorem of calculus），

$$P_n(1) - P_n(0) = \int_0^1 P_n'(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^1 P_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

這是因為 $n-1 \geq 1$，所以條件 $\int_0^1 P_{n-1}\,\mathrm{d}x = 0$ 適用。（這正是 $n=1$ 的情況必須另外處理的原因：$\int_0^1 P_0\,\mathrm{d}x = 1$。）因此 $Q_n \equiv 0$，歸納法至此完成：

$$P_n(x+1) - P_n(x) = nx^{n-1} \qquad \text{對所有} n \geq 1.$$

冪和

在恆等式中代入 $x = m$，並對 $m = 0, 1, \ldots, k$ 求和。右邊逐項相消：

$$\begin{aligned} n\sum_{m=0}^{k} m^{n-1} &= \sum_{m=0}^{k} [P_n(m+1) - P_n(m)] \\ &= [P_n(1) - P_n(0)] + [P_n(2) - P_n(1)] + \cdots + [P_n(k+1) - P_n(k)] \\ &= P_n(k+1) - P_n(0), \end{aligned}$$

這正是所求。（當 $n=1$ 時，$m=0$ 的一項是 0^0，必須理解為 1；這樣兩邊都等於 $k+1$。）

立方和

取 $n = 4$，所以我們需要 P_4。由 $P_0 = 1$ 開始逐級向上，每次積分，並選取常數使得在 $[0,1]$ 上的積分為零：

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x - \tfrac{1}{2}, \\ P_2(x) &= x^2 - x + \tfrac{1}{6} && \text{因為 } \textstyle\int_0^1 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{6}, \\ P_3(x) &= x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x && \text{因為 } \textstyle\int_0^1 (x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0, \\ P_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 + c \end{aligned}$$

其中 c 為某個常數。我們不需要求 c：它在 $P_4(k+1) - P_4(0)$ 中會抵消。記 $y = k+1$，則

$$P_4(y) - P_4(0) = y^4 - 2y^3 + y^2 = y^2(y-1)^2 = (k+1)^2k^2.$$

所以在求和公式中取 $n = 4$，得

$$\sum_{m=0}^{k} m^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

當 $k = 1000$ 時，$\frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 1001 = 500500$，所以

$$\sum_{m=0}^{1000} m^3 = (500500)^2,$$

這就是所要求的結果。

驗算

- 較小的 k：$k = 2$ 給出 $0 + 1 + 8 = 9 = \left(\frac{2 \cdot 3}{2}\right)^2$，而 $k = 3$ 給出 $36 = 6^2$。
- 同樣的方法用於 $n = 2$，得 $2\sum m = P_2(k+1) - P_2(0) = (k+1)^2 - (k+1) = k(k+1)$，即大家熟悉的三角形數（triangular number）公式。留意立方和正好是它的平方，這是一個值得發現的巧妙之處。
- 用電腦以精確分數構造 $P_1, \ldots, P_{12}$，可在隨機選取的有理點上驗證差分恆等式，並對 $k \leq 39$ 驗證求和公式。直接把立方相加，得 $250\,500\,250\,000 = 500500^2$。（我們略過的那個常數，原來是 $c = -\frac{1}{30}$。）

常見錯誤

- 試圖把 Q_n 在 $[0,1]$ 上積分，藉此確定 Q_n 這個常數。這樣會引入 $\int_1^2 P_n$，而我們對它一無所知。在 $x = 0$ 取值，再運用關於 P_{n-1} 的條件，要簡潔得多。
- 忘記了 $P_n(1) = P_n(0)$ 這一步需要 $n \geq 2$，所以基礎情況必須是 $n = 1$，並要親手驗證。
- 花時間去求 P_4 的常數項，而它其實會抵消。

STEP 之外

伯努利多項式（Bernoulli polynomials）有生成函數（generating function）$\dfrac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 0} P_n(x)\dfrac{t^n}{n!}$，而它們在 0 的值就是伯努利數（Bernoulli numbers）$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, \ldots$。它們是歐拉—麥克勞林公式（Euler–Maclaurin formula）的核心；這條公式把一個和與一個積分及其誤差項作比較。它們也出現在歐拉（Euler）對 $\sum 1/n^{2k}$ 的求值之中。想進一步了解這些想法，可參閱 Graham、Knuth 與 Patashnik 合著的 *Concrete Mathematics*（《具體數學》），書中對冪和與伯努利數有深入的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。