詳細解答

STEP II 1987，第 8 題

純數學 • 三維空間中的向量軌跡

> **STEP II 1987，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q8

關鍵思路

只要把每條方程改寫成與位置向量（position vector）為 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的點 A、B 之間的距離，就能認出它們各自代表甚麼。至於等價（equivalence）的部分，一切都可以只用兩個數表達：$P = |\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2$ 及 $Q = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2$。這樣，(i) 和 (ii) 就變成兩條關於 P 和 Q 的簡單線性方程，(iii) 和 (iv) 亦然。

解答

以下各處，A、B 和 R 分別是位置向量為 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{r}$ 的點，而 M 是 AB 的中點(midpoint)，其位置向量為 $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$。我們假設 $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$（$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 的情況留到最後處理），並記 $d = |\mathbf{a}-\mathbf{b}| = AB$。

第 (i) 部分

展開，

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2 &= (|\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + |\mathbf{a}|^2) - (|\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{r} + |\mathbf{b}|^2) \\ &= -2\Big[(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{r} - \tfrac{1}{2}(|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2)\Big].\end{aligned}$$

所以 (i) 成立當且僅當 $|\mathbf{r}-\mathbf{a}| = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|$，即 $RA = RB$。其軌跡（locus）是 AB **的垂直平分面（perpendicular bisector plane）**：經過 M 而法向量（normal）為 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 的平面。（我們也可以直接看出它是一個平面，因為 (i) 的形式是 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} =$ 常數，其中 $\mathbf{n} = \mathbf{a}-\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$；而 $\mathbf{r} = \mathbf{m}$ 滿足此方程，因為 $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$。）

第 (ii) 部分

方程 (ii) 表示 $\overrightarrow{RA}$ 與 $\overrightarrow{RB}$ 互相垂直，或者 R 就是 A 或 B。要辨認這個軌跡，可以配方（complete the square）：

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}-\mathbf{m}|^2 &= |\mathbf{r}|^2 - (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{r} + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \\ &= (\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \\ &= (\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2.\end{aligned}$$

所以 (ii) 等價於 $|\mathbf{r}-\mathbf{m}| = \frac{1}{2}d$。其軌跡是**以 AB 為直徑（diameter）的球面（sphere）**：球心 M，半徑 $\frac{1}{2}AB$。這正是「半圓上的圓周角是直角」的三維版本。

第 (iii) 及 (iv) 部分

方程 (iii) 表示 $RA = d/\sqrt{2}$。其軌跡是**以 A 為球心、$AB/\sqrt{2}$ 為半徑的球面**。同樣地，(iv) 的軌跡是**以 B 為球心、$AB/\sqrt{2}$ 為半徑的球面**。

等價性

設 $P = |\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2$ 及 $Q = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2$。第 (i) 部分已證明

$$\text{(i)} \iff P = Q.$$

至於 (ii)，寫成 $\mathbf{a}-\mathbf{b} = (\mathbf{a}-\mathbf{r}) - (\mathbf{b}-\mathbf{r})$ 再取平方：

$$d^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{b}-\mathbf{r}|^2 - 2(\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) = P + Q - 2(\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}).$$

因此

$$\text{(ii)} \iff P + Q = d^2.$$

方程 (iii) 和 (iv) 分別表示 $P = \frac{1}{2}d^2$ 及 $Q = \frac{1}{2}d^2$。現在

$$(P = Q \text{ 且 } P + Q = d^2) \iff P = Q = \tfrac{1}{2}d^2.$$

正方向成立，因為代入 $Q = P$ 得 $2P = d^2$。反方向方面，若 $P = Q = \frac{1}{2}d^2$，則顯然 $P = Q$ 且 $P + Q = d^2$。以上每一步都是「當且僅當」，所以 (i) 與 (ii) 同時成立，等價於 (iii) 與 (iv) 同時成立，得證。

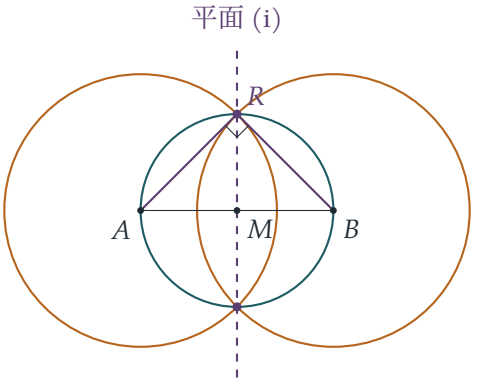
想一想 一個平面與一個球面相交，怎會跟兩個球面相交得出同一個集合？

兩組方程描述的都是同一個圓。平面 (i) 經過球面 (ii) 的球心 M，所以它把該球面截出一個大圓（great circle）：圓心 M，半徑 $\frac{1}{2}AB$，位於 AB 的垂直平分面上。球面 (iii) 和 (iv) 的半徑同為 $AB/\sqrt{2}$，兩者之和大於 AB，所以它們確實相交。由對稱性，它們相交於垂直平分面上一個以 M 為圓心的圓。在三角形 AMR 中運用畢氏定理（Pythagoras' theorem），其半徑為 $\sqrt{\frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \frac{1}{2}AB$，所以是同一個圓。

幾何意義

點 R 位於這個圓上，當且僅當三角形 ARB 是等腰直角三角形，且直角在 R。(i) 與 (ii) 這一組是透過三角形的性質來描述：$RA = RB$（等腰）及 $\angle ARB = 90°$（直角）。(iii) 與 (iv) 這一組則透過邊長來描述：在斜邊 (hypotenuse) 為 AB 的等腰直角三角形中，兩條直角邊的長度都是 $AB/\sqrt{2}$。上面的代數運算，其實就是畢氏定理及其逆定理(converse)的向量形式。恆等式 $d^2 = P + Q - 2(\mathbf{a} - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{r})$ 就是三角形 ARB 中的餘弦定理 (cosine rule)。

下圖展示任何一個包含 A 和 B 的平面所截出的截面。平分面顯示為虛線，球面 (ii) 顯示為青色圓，球面 (iii) 和 (iv) 則顯示為琥珀色圓。四者相交於兩點，就是解集的圓穿過紙面之處。



退化情況

若 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$，則 (i) 變成 $0 = 0$，對所有 $\mathbf{r}$ 都成立，而 (ii)、(iii) 和 (iv) 都表示 $\mathbf{r} = \mathbf{a}$。等價性仍然成立，但每個軌跡都退化（degenerate）為單一點 A（對 (i) 而言則是整個空間）。

驗算

取 $\mathbf{a} = (1,0,0)$ 及 $\mathbf{b} = (-1,0,0)$。那麼 (i) 是平面 $x = 0$，(ii) 是 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$。方程 (iii) 和 (iv) 是 $(x \mp 1)^2 + y^2 + z^2 = 2$，兩式相減又得到 $x = 0$。四者相交於單位圓 $y^2 + z^2 = 1, x = 0$。例如 $R = (0,1,0)$ 給出 $RA = RB = \sqrt{2}$ 及 $\overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RB} = -1 + 1 = 0$。我們亦以有理數運算，對 5000 組隨機選取的 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{r}$ 精確驗證了上述所有恆等式，並確認預測的圓上的隨機點都滿足全部四條方程。

常見錯誤

- 把 (ii) 說成「一個圓」。在三維空間中它是球面，而 (i) 的軌跡是平面，不是直線。
- 只證明了一個方向。題目要求證明等價，所以要確保每一步都可逆，或者把兩個方向都證明。
- 只說兩組方程「都得出一個圓」，卻沒有核實那是同一個圓：同一平面、同一圓心、同一半徑。

STEP 之外

這些軌跡每一個都是 $\mathbf{r}$ 的某個二次函數的等值集（level set），而把兩條球面方程相減得出一個平面的技巧，正是兩個球面的根面（radical plane）這個概念。更廣泛地說，用不同的方程組描述同一個幾何對象，是代數幾何（algebraic geometry）的起點。在這裏，空間中的一個圓由兩條方程截出，而有許多不同的方程組合都能做到。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）是鞏固向量代數的好去處，特別是點積（dot product）、長度與角度之間的關係。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。