詳細解答

STEP II 1987，第 7 題

純數學 • 梯形法則與階乘

> **STEP II 1987，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q7

關鍵思路

以單位步長對 $\ln x$ 求梯形和（trapezium sum），結果幾乎正好是 $\ln n!$，因為所加的高度正是 $\ln 1, \ln 2, \ldots, \ln n$。由於 $\ln x$ 是凹函數（concave），每一條弦都在曲線下方，所以梯形法則（trapezium rule）總是低估積分；單憑這一個事實，就能決定每條不等式的方向。至於最後一部分，技巧是把細網格上的誤差重新縮放，使之變成另一個區間上的單位步長誤差，從而可以直接與 $\mathrm{g}(kn)$ 背後的誤差比較。

解答

說明法則的依據

把 $[x_0, x_N]$ 分成 N 條狹條 $[x_r, x_{r+1}]$，每條寬度為 h。在每條狹條上，以連接 $(x_r, \mathrm{f}(x_r))$ 與 $(x_{r+1}, \mathrm{f}(x_{r+1}))$ 的直線（弦（chord））代替曲線。弦下方的區域是一個梯形，面積為 $\frac{1}{2}h\{\mathrm{f}(x_r) + \mathrm{f}(x_{r+1})\}$。對 $r = 0, 1, \ldots, N-1$ 求和，每個內部縱坐標（ordinate）$\mathrm{f}(x_1), \ldots, \mathrm{f}(x_{N-1})$ 都在兩個相鄰梯形中出現，而兩端的縱坐標各出現一次，於是得到題中的公式。當 h 很小時，弦與曲線相當接近，所以近似效果良好。

單位步長與 $n! \approx \mathrm{g}(n)$

取 $u = \ln x$、$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ 作分部積分（integration by parts），

$$I_n = \int_1^n \ln x \,\mathrm{d}x = \Big[x \ln x\Big]_1^n - \int_1^n 1 \,\mathrm{d}x = n \ln n - n + 1.$$

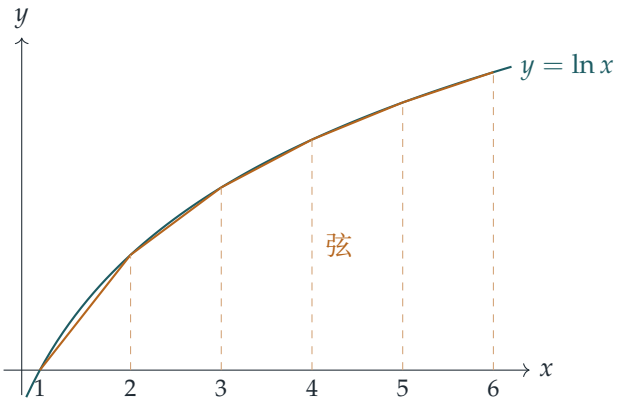
當 $h=1$ 時，縱坐標位於 $x=1,2,\ldots,n$，所以梯形和為

$$\begin{aligned} T_n &= \tfrac{1}{2}\{\ln 1 + 2\ln 2 + \cdots + 2\ln(n-1) + \ln n\} \\ &= \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n - \tfrac{1}{2}\ln n = \ln n! - \tfrac{1}{2}\ln n, \end{aligned}$$

這裏用了 $\ln 1 = 0$。令 $T_n \approx I_n$，

$$\ln n! \approx (n+\tfrac{1}{2})\ln n + 1 - n, \qquad \text{所以} \qquad n! \approx n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-n} = \mathrm{g}(n).$$

為何 $n! < \mathrm{g}(n)$



由於 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln x = -\dfrac{1}{x^2} < 0$，曲線 $y=\ln x$ 是嚴格凹的：在每條狹條 $[m, m+1]$ 上，除端點外，弦都嚴格位於曲線下方（見草圖）。因此每個梯形的面積都嚴格小於該狹條上曲線下方區域的面積，把 $n-1 \geq 1$ 條狹條加起來，

$$T_n < I_n \quad\Longrightarrow\quad \ln n! - \tfrac{1}{2}\ln n < n\ln n - n + 1 \quad\Longrightarrow\quad \ln n! < \ln \mathrm{g}(n).$$

由於 exp 是遞增函數，所以 $n! < \mathrm{g}(n)$。

寬度為 $1/k$ 的狹條

現在 $h = 1/k$、$N = k(n-1)$，而對 $r = 0,1,\ldots,k(n-1)$，有 $x_r = 1 + \frac{r}{k} = \frac{k+r}{k}$。最後一個縱坐標是 $x_N = n$。把梯形和寫成「h 乘以所有縱坐標之和，再減去兩端縱坐標各一半」，並利用 $\ln x_0 = 0$，

$$T_n^{(k)} = \frac{1}{k}\left\{\sum_{r=0}^{k(n-1)} \ln\frac{k+r}{k} - \tfrac{1}{2}\ln n\right\}.$$

分子 $k+r$ 依次取 $k, k+1, \ldots, kn$，而分母中共有 $k(n-1)+1$ 個因子 k，所以

$$\sum_{r=0}^{k(n-1)} \ln\frac{k+r}{k} = \ln\frac{(kn)!}{(k-1)!} - \big(k(n-1)+1\big)\ln k = \ln\frac{(kn)!}{k!} - k(n-1)\ln k,$$

因為 $(k-1)!\,k = k!$。令 $kT_n^{(k)} \approx kI_n = kn\ln n - kn + k$ 並整理，

$$\begin{aligned}\ln(kn)! &\approx \ln k! + k(n-1)\ln k + \tfrac{1}{2}\ln n + kn\ln n + k(1-n)\\ &= \ln k! + \left(kn+\tfrac{1}{2}\right)\ln n + k(1-n)(1-\ln k),\end{aligned}$$

即

$$(kn)! \approx k!\, n^{kn+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathrm{e}}{k}\right)^{k(1-n)} =: A,$$

正如所求。

哪一個更接近？

對整數 $a < b$，記誤差 (error) $\displaystyle\int_a^b \ln t\,\mathrm{d}t -$ (單位步長梯形和，區間為$[a,b]$) 為 $E(a,b)$。根據上面的凹性論證，$E(a,b) > 0$，而且相鄰區間上的誤差可以相加：$E(1,b) = E(1,a) + E(a,b)$。

推導 A 的過程中，除了以 I_n 代替 $T_n^{(k)}$ 之外，其餘都是精確的，所以

$$\ln A - \ln(kn)! = k\big(I_n - T_n^{(k)}\big).$$

同理，把單位步長的推導中的 n 換成 kn，得 $\ln \mathrm{g}(kn) - \ln(kn)! = E(1,kn)$。

> ? **想一想** 寬度為 $1/k$ 的網格上的誤差，怎樣才能與寬度為 1 的網格上的誤差作比較？

代入 $x = t/k$。縱坐標 $x_r = (k+r)/k$ 變成 $t = k, k+1, \ldots, kn$，而 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/k$，所以

$$k\big(I_n - T_n^{(k)}\big) = \int_k^{kn} \ln\frac{t}{k}\,\mathrm{d}t \;-\; \big(\text{單位步長梯形和，函數為}\ln\tfrac{t}{k}\text{，區間為}[k,kn]\big).$$

由於 $\ln\frac{t}{k} = \ln t - \ln k$，而梯形法則對常數 $\ln k$ 是精確的，常數項互相抵消，所以上式正是 $E(k,kn)$。因此

$$\ln \mathrm{g}(kn) - \ln(kn)! = E(1,kn) = E(1,k) + E(k,kn) = E(1,k) + \big(\ln A - \ln(kn)!\big).$$

A 和 $\mathrm{g}(kn)$ 都大於 $(kn)!$，而當 $k \geq 2$ 時 $E(1,k) > 0$，所以

$$(kn)! < A < \mathrm{g}(kn) \qquad (k \geq 2).$$

所以無論以差還是以比來衡量，新的近似值 A 都比 $\mathrm{g}(kn)$ 更接近 $(kn)!$。當 $k = 1$ 時兩者相同，因為 $A = 1!\,n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-n} = \mathrm{g}(n)$。換句話說，$A$ 對首 k 個因子使用了*精確*值 $k!$，只對其餘部分作近似，因此避開了曲線起始處的誤差 $E(1,k)$，而那正是 ln 彎曲得最厲害的地方。

驗算

- 在最終公式中取 $k = 1$，得回 $\mathrm{g}(n)$，理應如此。
- 取 $n = 5$：$5! = 120$，而 $\mathrm{g}(5) = 5^{5.5}\mathrm{e}^{-4} \approx 128.0$，所以確實 $n! < \mathrm{g}(n)$。
- 取 $k = 3$、$n = 5$：$15! \approx 1.3077 \times 10^{12}$，$A \approx 1.3369 \times 10^{12}$，$\mathrm{g}(15) \approx 1.4102 \times 10^{12}$，證實 $(kn)! < A < \mathrm{g}(kn)$。
- 比值 $\mathrm{g}(kn)/A = \exp E(1,k)$ 只取決於 k，與 n 無關；當 $k = 3$ 時它等於 $\mathrm{g}(3)/3! \approx 1.0548$，與上面的數值吻合。

常見錯誤

- 數錯寬度為 $1/k$ 的和中因子 k 的個數：縱坐標共有 $k(n-1)+1$ 個，而多出來的那個 $\ln k$ 正是把 $(k-1)!$ 變成 $k!$ 的關鍵。
- 用一幅弦位於曲線上方的草圖去論證「$n! < \mathrm{g}(n)$」。對凹函數而言，弦位於曲線下方，所以梯形法則會低估積分。
- 忘記 $\ln A$ 的誤差是細網格誤差的 k 倍，而不是細網格誤差本身。

STEP 之外

這裏的 $\mathrm{g}(n)$ 是斯特靈公式（Stirling's formula）$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}$ 的粗略形式。由於誤差 $E(1,n)$ 隨 n 遞增且有界（每條狹條的誤差最多是某常數乘以 $1/m^2$），它們收斂（converge），這就解釋了為何 $n!/\mathrm{g}(n)$ 趨向常數 $\sqrt{2\pi}/\mathrm{e} \approx 0.922$。歐拉－麥克勞林公式（Euler–Maclaurin formula）把這一點精確化，並給出完整的漸近級數（asymptotic series）。Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）講述了黎曼積分（Riemann integral）以及支撐上述內容的數值積分法則的誤差估計。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。