詳細解答

STEP II 1987，第 6 題

純數學 • 利用對稱性求定積分

> **STEP II 1987，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q6

關鍵思路

區間 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 是對稱的，所以反射 $\theta \mapsto -\theta$ 是自然的第一步：它把 $\sin\theta$ 變成 $-\sin\theta$，第二個形式便不費吹灰之力得到。把兩個形式取平均，可消去奇部分（odd part），剩下分母只含 $\sin^2\theta$，再稍作代數處理，就能拆成一個常數加上一個標準的 $\tan\theta$ 積分（integral）。最後一部分的重點在於一個看似無害的步驟：$\sqrt{\cos^2 2\alpha}$ 是 $|\cos 2\alpha|$，而不是 $\cos 2\alpha$。

解答

全文記 $s = \sin 2\alpha$ 及 $c = \cos 2\alpha$，因此 $s^2 + c^2 = 1$。當 $0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ 時，有 $0 < s < 1$ 及 $0 < c < 1$。由於 $s < 1$，分母 $1 \mp s\sin\theta$ 在整個區間上都是正數，所以所有積分都是常義積分（proper integral）。

I 的第二個形式

代入 $\theta = -\phi$，於是 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$，而上下限互換：

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2(-\phi)}{1 - \sin(-\phi)\,s}\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + s\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

這裏用了 $\cos(-\phi) = \cos\phi$ 及 $\sin(-\phi) = -\sin\phi$。把 ϕ 改名為 θ，即得所求形式。

含 $\cot^2 2\alpha$ 的表達式

把 I 的兩個表達式相加，

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\theta \left(\frac{1}{1 - s\sin\theta} + \frac{1}{1 + s\sin\theta} \right) \mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\cos^2\theta}{1 - s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

所以

$$I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\theta}{1 - s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

現在利用 $1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$ 及 $1 - s^2 = c^2$ 改寫分母：

$$1 - s^2\sin^2\theta = \cos^2\theta + c^2\sin^2\theta.$$

? **想一想** 怎樣把 $\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta}$ 拆成一個常數加上一個我們能積分的部分？

目標是把分子寫成分母的倍數加上一個餘項，而這個餘項除以 $\cos^2\theta$ 之後不再依賴 θ。由於

$$(\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta) - c^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (1 - c^2)\cos^2\theta = s^2\cos^2\theta,$$

兩邊除以 $s^2(\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)$（因為 $s \neq 0$，這是容許的），得

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta} = \frac{1}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta} = \frac{1}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\sec^2\theta}{1 + c^2\tan^2\theta},$$

其中最後一步把分子分母同除以 $\cos^2\theta$。在長度為 π 的區間上積分，並利用 $c^2/s^2 = \cot^2 2\alpha$，得

$$I = \frac{\pi}{\sin^2 2\alpha} - \cot^2 2\alpha \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sec^2\theta}{1 + \cos^2 2\alpha\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

此即所求。

求 I 的值

把餘下的積分記為 J。代入 $t = \tan\theta$，於是 $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$；當 θ 由 $-\frac{1}{2}\pi$ 走到 $\frac{1}{2}\pi$ 時，t 走遍整條實數線。於是，當 $c \neq 0$ 時，

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + c^2t^2} = \left[\frac{1}{|c|}\arctan(|c|\,t) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{|c|}.$$

（$|c|$ 正是由代換 $u = |c|t$ 產生的：它使上下限仍按正確次序由 $-\infty$ 到 ∞。）

當 $0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ 時，$c > 0$，所以 $J = \pi/c$，而

$$I = \frac{\pi}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\pi}{c} = \frac{\pi(1 - c)}{1 - c^2} = \frac{\pi}{1 + c} = \frac{\pi}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{\pi}{2\cos^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\sec^2\alpha,$$

這裏約去了 $1 - c \neq 0$，並用了 $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$。這就是所求結果。

$\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ 的情況

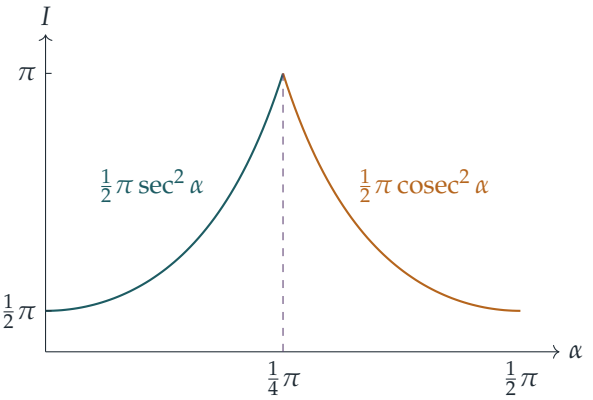
> **想一想** 當 α 越過 $\frac{1}{4}\pi$ 時，論證中有沒有任何地方會改變？

幾乎沒有：我們仍然有 $0 < s < 1$，所以直至以 J 表示 I 的公式為止，每一步都照樣成立。唯一的分別是現在 $c = \cos 2\alpha < 0$，所以 $|c| = -c$，而 $J = -\pi/c$。因此

$$I = \frac{\pi}{s^2} + \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\pi}{c} = \frac{\pi(1+c)}{1-c^2} = \frac{\pi}{1-c} = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\operatorname{cosec}^2\alpha,$$

這裏用了 $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$。若盲目照搬第一個答案，便會得出錯誤的值。

I 對 α 的圖像顯示兩條公式在 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 處相接，那裏兩者都等於 π：



驗算

- 當 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 時，$s = 1$，被積函數（integrand）為 $\cos^2\theta/(1-\sin\theta) = 1+\sin\theta$，其積分為 π。兩條公式在該處都給出 π，理應如此。
- 當 $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ 時：$s = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$c = \frac{1}{2}$，所以 $I = \pi/(1+c) = \frac{2}{3}\pi$，而 $\frac{1}{2}\pi\sec^2\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}\pi$。
- 在 $\frac{1}{4}\pi$ 兩側隨機取十個 α 值，用辛普森法則（Simpson's rule）計算原積分，與公式的結果相差少於 10^{-6}；例如 $\alpha \approx 0.6308$ 時，兩種方法都得出 $I \approx 2.408759$。
- 當 $\alpha \to 0$ 時，被積函數趨向 $\cos^2\theta$，其積分為 $\frac{1}{2}\pi$，與 $\frac{1}{2}\pi\sec^2 0$ 吻合。

常見錯誤

- 寫成 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+c^2t^2} = \frac{\pi}{c}$ 而漏了絕對值（modulus）。當 $c < 0$ 時，這是負數，而被積函數為正，這是不可能的。

- 遺漏了 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$ 中的負號，或忘記了它會因上下限互換而抵消。
- 擔心 $t = \tan\theta$ 在 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 處無定義：關於 t 的積分是反常積分（improper integral），但它收斂（converges），而這已足夠。

STEP 之外

答案中整齊的對稱 $\alpha \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi - \alpha$ 並非巧合：I 只透過 $\sin 2\alpha$ 依賴 α，而它在這個互換下不變；但像 $\frac{1}{2}\pi\sec^2\alpha$ 這樣的公式卻會改變。默默地平方再開方的代數運算，正好會掩蓋這類問題。$\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的有理函數在一個完整週期上的積分（例如我們取平均後的被積函數，其週期為 π），在大學裏通常用沿單位圓的圍道積分（contour integration）來計算，而留數定理（residue theorem）使這類計算幾乎變得機械化。如想看一個優美而富幾何直觀的入門介紹，可參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。