詳細解答

STEP II 1987，第 5 題

純數學 • 拉格朗日反演級數

> **STEP II 1987，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q5

關鍵思路

拉格朗日(Lagrange)恆等式(Lagrange's identity)就像一部機器：把函數 $\phi(y) = y - \mathrm{f}(y)$ 放進去，取其 n 次方，求導 $n-1$ 次，再把結果加起來。所有功夫都在於把問題設定好，使 ϕ 盡量簡單，最好是 y 的單一冪次或單一指數函數，因為這樣 ϕ^n 的 $(n-1)$ 階導數（derivative）就能一下子寫出來。在每一部分中，我們都選取適當的 f，使所要解的方程寫成 $\mathrm{f}(x) = y$ 的形式，其中 y 取一個方便的值。

解答

全文設 $\phi(y) = y - \mathrm{f}(y)$，於是恆等式可寫成

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} [\phi(y)^n].$$

注意 $n = 1$ 那一項涉及的是零階導數，也就是 $\phi(y)$ 本身。

我們會反覆用到一個事實：對整數 $m \geq n-1$，

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} y^m = \frac{m!}{(m-n+1)!} y^{m-n+1},$$

因為每求導一次，就把當時的冪次乘到前面，並把冪次減一。

第 (i) 部分

取 $\mathrm{f}(x) = \alpha x$，則 $\phi(y) = (1-\alpha)y$，所以 $\phi(y)^n = (1-\alpha)^n y^n$。在上式中取 $m = n$，求導 $n-1$ 次得

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} [(1-\alpha)^n y^n] = (1-\alpha)^n \, n! \, y.$$

$n!$ 與 $\frac{1}{n!}$ 互相抵消，所以恆等式的右方為

$$y + \sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)^n y = y \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n.$$

這是一個公比為 $1-\alpha$ 的等比級數（geometric series）。由於 $0 < \alpha < 2$，有 $-1 < 1-\alpha < 1$，因此級數收斂（converges），其和為

$$y \cdot \frac{1}{1-(1-\alpha)} = \frac{y}{\alpha}.$$

另一方面，由 $y = \alpha x$ 直接可得 $x = y/\alpha$，所以 $\mathrm{f}^{-1}(y) = y/\alpha$。兩者一致，於是恆等式在這情況下得到驗證。條件 $0 < \alpha < 2$ 正正就是級數收斂的條件。

第 (ii) 部分

方程為 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}$，其中

$$\mathrm{f}(x) = x - \tfrac{1}{4}x^3, \qquad \text{所以} \qquad \phi(y) = y - \mathrm{f}(y) = \tfrac{1}{4}y^3.$$

於是 $\phi(y)^n = 4^{-n} y^{3n}$，在導數公式中取 $m = 3n$（它不小於 $n-1$），得

$$\frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} [4^{-n} y^{3n}] = \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\, y^{2n+1}.$$

因此拉格朗日恆等式給出

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\, y^{2n+1}.$$

開頭的 y 恰好就是通項在 $n = 0$ 時的值，因為 $\frac{0!}{0!\,1!\,4^0}\, y^1 = y$。所以可以把它併入總和，由 $n = 0$ 開始：

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\, y^{2n+1}.$$

現在代入 $y = \frac{1}{2}$。由於 $4^n \cdot 2^{2n+1} = 2^{2n} \cdot 2^{2n+1} = 2^{4n+1}$，得

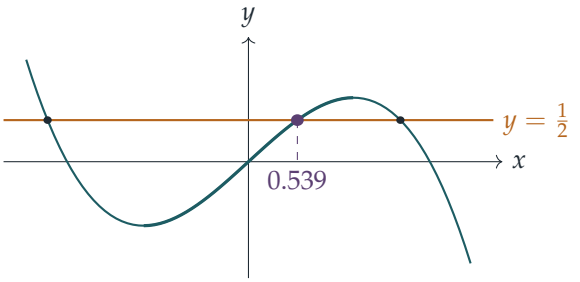
$$x = \mathrm{f}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,2^{4n+1}},$$

又因 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}$，這個 x 是 $\frac{1}{2} = x - \frac{1}{4}x^3$ 的一個根，得證。

想一想 這個三次方程有三個實根。級數給出的是哪一個？

函數 f 在整條實數線上並非一一對應（one-to-one），所以「f^{-1}」指的是級數所描述的那一支。這個級數是 y 的冪級數（power series），以 $y + \cdots$ 開始，所以它給出 $\mathrm{f}^{-1}(0) = 0$，而且當 y 很小時 $\mathrm{f}^{-1}(y) \approx y$。它是 f 限制在通過原點的遞增部分上的反函數，在那裏

$\mathrm{f}'(x) = 1 - \frac{3}{4}x^2 > 0$，即 $|x| < 2/\sqrt{3}$。首幾項為 $\frac{1}{2} + \frac{1}{32} + \frac{3}{512} + \cdots \approx 0.537$，而總和準確至四位小數為 0.5392：這是最小的正根，已在下圖標出。另外兩個根約為 1.675 和 -2.214，位於曲線的遞減部分。



曲線上較粗的一段是通過原點的遞增分支；級數給出的就是這分支上的根，以梅紅色標示。

第 (iii) 部分

這裏的竅門是把整條方程化成 $\mathrm{f}(x) = y$ 的形式，並使 ϕ 簡單。把 $x = \mathrm{e}^{\lambda x}$ 改寫為

$$x - \mathrm{e}^{\lambda x} = 0,$$

我們取

$$\mathrm{f}(x) = x - \mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad \phi(y) = y - \mathrm{f}(y) = \mathrm{e}^{\lambda y},$$

而所求的是 $x = \mathrm{f}^{-1}(0)$。此時 $\phi(y)^n = \mathrm{e}^{n\lambda y}$，每求導一次就乘以 $n\lambda$，所以

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}}\,\mathrm{e}^{n\lambda y} = (n\lambda)^{n-1}\mathrm{e}^{n\lambda y}.$$

（當 $n = 1$ 時，這給出 $\mathrm{e}^{\lambda y}$，正確無誤。）拉格朗日恆等式給出

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\lambda)^{n-1}}{n!}\,\mathrm{e}^{n\lambda y},$$

代入 $y = 0$，

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}\,\lambda^{n-1} = 1 + \lambda + \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{8}{3}\lambda^3 + \frac{125}{24}\lambda^4 + \cdots.$$

等價地，把指標平移，可得 $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}\lambda^n$。

這個級數在 λ 取甚麼值時收斂？相鄰兩項之比為

$$\frac{(n+1)^n\lambda^n/(n+1)!}{n^{n-1}\lambda^{n-1}/n!} = \lambda\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \to \mathrm{e}\lambda,$$

所以由比值檢驗法（ratio test），級數在 $|\lambda| < 1/\mathrm{e}$ 時收斂。這是一個自然的界線：$y = x$ 與 $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ 相切，恰好發生在 $\lambda = 1/\mathrm{e}$ 時（切點在 $x = \mathrm{e}$），而當 $\lambda > 1/\mathrm{e}$ 時根本沒有實根。當 $0 < \lambda < 1/\mathrm{e}$ 時有兩個正根，級數給出較小的那一個，即當 $\lambda \to 0$ 時趨向 1 的那個根。

驗算

- 在 (ii) 中，首四項為 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{32}$、$\frac{3}{512}$ 和 $\frac{3}{2048}$。以數值方法加總 200 項得 0.539189，而對 $x^3 - 4x + 2 = 0$ 使用牛頓法（Newton's method）得根 0.5391888…，兩者在機器精度內一致。
- 在 (iii) 中，代入 $\lambda = 0$：級數給出 $x = 1$，而確實 $x = \mathrm{e}^0 = 1$。取 $\lambda = 0.2$ 加總級數得 $x \approx 1.29586$，而 $\mathrm{e}^{0.2 \times 1.29586} = 1.29586$。取 $\lambda = -0.3$ 則得 0.78918，同樣滿足方程。當 $\lambda = 0.2$ 時，另一個根約為 12.71，與級數的值相距甚遠。
- 在 (i) 中，試取 $\alpha = 1$：此時 $\phi = 0$，總和中每一項都是零，於是 $\mathrm{f}^{-1}(y) = y$，理應如此。

常見錯誤

- 忘記 $n = 1$ 那一項不用求導（即零階導數），因而漏掉或弄錯這一項。
- 在 (ii) 中，沒有察覺單獨的 y 正是通項公式在 $n = 0$ 時的項，因而未能湊成由 $n = 0$ 開始的總和。
- 在 (iii) 中，嘗試取 $\mathrm{f}(x) = x\mathrm{e}^{-\lambda x}$ 之類的函數。這樣做並無不可，但 ϕ 便成了兩項之差，導數會變得一團糟。選取 $\phi = \mathrm{e}^{\lambda y}$ 則令導數變得輕而易舉。

STEP 之外

這就是*拉格朗日反演定理*（Lagrange inversion theorem），通常用複分析（complex analysis）（柯西（Cauchy）留數定理）或形式冪級數（formal power series）來證明。(iii) 中的係數 $(n+1)^{n-1}/n!$ 屬於 Lambert W 函數，而 n^{n-1} 是 n 個頂點上的有根標號樹（rooted labelled trees）的數目。同樣地，(ii) 中的數 $\frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!}$ 計算的是三叉樹（ternary trees）的數目，與卡特蘭數（Catalan numbers）是近親。因此，拉格朗日反演是枚舉組合學（enumerative combinatorics）的核心工具。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）提供複分析方面的背景，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）則有更多關於級數的 STEP 練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。