詳細解答

STEP II 1987，第 4 題

純數學 • 複數與幾何

> **STEP II 1987，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q4

關鍵思路

乘以 $e^{i\theta}$ 就是一個旋轉（rotation）。把三角形的一條邊繞某個頂點旋轉 $60°$，得到的正是等邊三角形（equilateral triangle）。這樣，幾何條件就化為關於 α, β, γ 的線性方程（linear equation）。若容許兩種定向（orientation），條件就變成兩個線性表達式中有一個為零；兩者之積正是題目中的對稱（symmetric）二次式。由於它是對稱的，所以可以用三次方程（cubic）的係數（coefficients）來表示。

解答

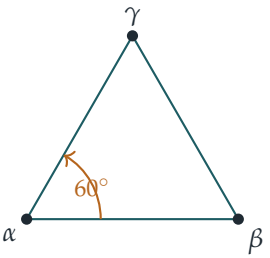
全文中設 $\omega = e^{2\pi i/3}$，於是 $\omega^3 = 1$、$\bar{\omega} = \omega^2$ 及 $1 + \omega + \omega^2 = 0$。

乘以 $e^{i\theta}$

若 $z = re^{i\phi}$，則 $ze^{i\theta} = re^{i(\phi+\theta)}$：模（modulus）不變，輻角（argument）增加 θ。因此，點 $ze^{i\theta}$ 就是點 z 繞原點逆時針（anticlockwise）旋轉角 θ 後的像。

更一般地，$\gamma - \alpha = e^{i\theta}(\beta - \alpha)$ 表示由 α 到 γ 的向量，等於由 α 到 β 的向量逆時針旋轉 θ 所得；換言之，γ 是 β 繞 α 旋轉 θ 後的像。

逆時針方向的等邊三角形



相異的點 α, β, γ 按逆時針次序構成等邊三角形，當且僅當 γ 是 β 繞 α 逆時針旋轉 $\frac{\pi}{3}$ 所得，即

$$\gamma - \alpha = e^{i\pi/3}(\beta - \alpha).$$

（必要性（necessity）：在這樣的三角形中，$|\alpha\gamma| = |\alpha\beta|$，而且在 α 處的角為 $\frac{\pi}{3}$，由 $\alpha\beta$ 逆時針量度至 $\alpha\gamma$。充分性（sufficiency）：該方程給出 $|\alpha\gamma| = |\alpha\beta|$，兩者夾角為 $\frac{\pi}{3}$，所以三角形是頂角為 60° 的等腰（isosceles）三角形，因而是等邊三角形，而且定向是逆時針的。）

把條件寫成對稱的形式會更簡潔。由於 $e^{i\pi/3} = -\omega^2$（因為 $-\omega^2 = e^{i\pi}e^{4\pi i/3} = e^{i\pi/3}$，這裏用了 $e^{7\pi i/3} = e^{i\pi/3}$），條件變為

$$\begin{aligned} & \gamma - \alpha = -\omega^2\beta + \omega^2\alpha \\ \iff \quad & \gamma + \omega^2\beta - (1+\omega^2)\alpha = 0 \\ \iff \quad & \gamma + \omega^2\beta + \omega\alpha = 0, \end{aligned}$$

其中用了 $1 + \omega^2 = -\omega$。兩邊乘以 ω^2（它不為零，所以這一步可逆），得到等價條件

$$\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0.$$

簡單驗證一下：$1, \omega, \omega^2$ 是一個等邊三角形按逆時針次序的頂點，而 $1 + \omega \cdot \omega + \omega^2 \cdot \omega^2 = 1 + \omega^2 + \omega = 0$。

任一定向

任何三個構成等邊三角形的相異點，若不是按 α, β, γ 的次序為逆時針，就是按 α, γ, β 的次序為逆時針（循環重排不會改變定向）。由上一部分，對相異的 α, β, γ，

$$\begin{aligned} \text{等邊} & \iff \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0 \text{ 或 } \alpha + \omega\gamma + \omega^2\beta = 0 \\ & \iff (\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma) = 0. \end{aligned}$$

想一想 怎樣看出這個乘積正是我們想要的表達式？

把它展開就可以了。平方項給出 $\alpha^2+\omega^3\beta^2+\omega^3\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$。交叉項為

$$\begin{aligned}\alpha\beta(\omega^2+\omega)+\alpha\gamma(\omega+\omega^2)+\beta\gamma(\omega^2+\omega^4) &= \alpha\beta(\omega+\omega^2)+\gamma\alpha(\omega+\omega^2)+\beta\gamma(\omega^2+\omega)\\ &= -\alpha\beta-\gamma\alpha-\beta\gamma,\end{aligned}$$

其中用了 $\omega^4=\omega$ 及 $\omega+\omega^2=-1$。因此

$$(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta,$$

所以相異的點 α,β,γ（按某個次序）構成等邊三角形，當且僅當

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta=0,$$

得證。

值得留意的是，若點不一定相異，情況會怎樣：例如若 $\alpha=\beta$，表達式變為 $(\alpha-\gamma)^2$，只有當 $\gamma=\alpha$ 時才為零。所以表達式為零，恰好是在三點構成等邊三角形或三點重合的時候。下文會用到這一點。

三次方程

設 $z^3+az^2+bz+c=0$ 的根為 α,β,γ。則

$$\alpha+\beta+\gamma=-a,\qquad \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=b,\qquad \alpha\beta\gamma=-c.$$

該表達式是對稱的，所以可以用這些量來表示：

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta) &= (\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)\\ &= a^2-3b.\end{aligned}$$

根據上面的說明，$a^2=3b$ 恰好在各根構成等邊三角形或全部相等時成立。三個根都等於 t，即 $z^3+az^2+bz+c=(z-t)^3$，所以 $a=-3t$、$b=3t^2$、$c=-t^3$；也就是 $b=\frac{a^2}{3}$ 及 $c=\frac{a^3}{27}$。因此，各根位於一個（真正的）等邊三角形的頂點，當且僅當

$$\boxed{a^2=3b \quad \text{且} \quad 27c\neq a^3}$$

若願意把三點重合視為退化的等邊三角形，條件就只是 $a^2=3b$。

有一個漂亮的方法可以直接看出這一點。代入 $z=w-\frac{a}{3}$ 可消去 z^2 項；當 $a^2=3b$ 時，一次項亦會消失，方程變為 $w^3=\frac{a^3}{27}-c$。它的根是一個非零數的三個立方根，構成以 $w=0$ 為中心的等邊三角形，即以 $z=-\frac{a}{3}$ 為中心，而這正是各根的形心（centroid）。

驗算

- $z^3 - 1 = 0$（$a = b = 0$，$c = -1$）的根為 $1, \omega, \omega^2$：構成等邊三角形，而確實 $a^2 = 0 = 3b$ 且 $27c = -27 \neq 0$。
- $z^3 - z = 0$ 的根為 $0, \pm 1$，三點共線（collinear）；此時 $a^2 - 3b = 3 \neq 0$。
- 以數值方法，對 1000 個隨機三角形 α、β、$\gamma = \alpha + e^{i\pi/3}(\beta - \alpha)$，我們驗證了三角形為逆時針方向的等邊三角形，$\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma$ 及該二次表達式（在每種次序下）都為零，而且對隨機複數，乘積恆等式及 $a^2 - 3b$ 公式在 10^{-8} 的誤差內成立。

常見錯誤

- 弄錯正負號或定向：$e^{i\pi/3}$ 是 $-\omega^2$，而不是 ω；繞一個頂點乘以 ω 旋轉（即旋轉 120°）並不會得到等邊三角形。
- 忘記三重根的情況：單憑 $a^2 = 3b$ 亦容許 $z^3 + az^2 + bz + c = (z + \frac{a}{3})^3$，此時三個「頂點」重合。

STEP 之外

條件 $\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0$ 是三元組 (α, β, γ) 的離散傅立葉變換（discrete Fourier transform）的一個分量；而消去 z^2 項的技巧，是以根式解（solving by radicals）三次方程的第一步，由此可通往伽羅瓦理論（Galois theory）。從幾何角度看，這個結果表明：各根構成等邊三角形，恰好是導數（derivative）$3z^2 + 2az + b$ 在形心處有二重根（double root）的時候；這是關於導數之根的馬登定理（Marden's theorem）的一個特例。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）是進一步探索複數乘法幾何意義的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。