詳細解答

STEP II 1987，第 3 題

純數學 • 共軛根式

> **STEP II 1987，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q3

關鍵思路

設 $\alpha = a + \sqrt{a^2 - b}$ 及 $\beta = a - \sqrt{a^2 - b}$。兩者互為共軛（conjugate）：它們的和 $2a$ 與積 b 都是整數，因此 $\alpha^n + \beta^n$ 必定是整數。若 b 所滿足的條件迫使較小的共軛數 β 嚴格介乎 0 與 1 之間，那麼 β^n 正是我們所需的小數部分（fractional part），其餘結論便隨之而來。

解答

在整個解答中，設

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 - b}, \qquad \beta = a - \sqrt{a^2 - b}, \qquad \text{所以} \qquad \alpha + \beta = 2a, \quad \alpha\beta = a^2 - (a^2 - b) = b.$$

β 的位置。 首先，這個平方根是實數。由於 $b < 2a - 1$，

$$a^2 - b > a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geq 0.$$

對這條嚴格不等式（inequality）兩邊取正平方根，得 $\sqrt{a^2 - b} > a - 1$。另外 $b > 0$，所以 $a^2 - b < a^2$，從而 $\sqrt{a^2 - b} < a$。綜合兩者，

$$a - 1 < \sqrt{a^2 - b} < a \quad \Longrightarrow \quad 0 < \beta < 1.$$

（這個條件是最佳的：若 $b = 2a - 1$，則 $\sqrt{a^2 - b} = a - 1$，而 $\beta = 1$ 恰好成立。）

第 (i) 部分

由於 $0 < \beta < 1$，對每個正整數 n 都有 $0 < \beta^n < 1$。現在 M 是整數，且 $\beta^n = M + s$，其中 $0 \le s < 1$，所以 M 是 β^n 的整數部分（integer part），即 0。因此

$$M = 0 \qquad 及 \qquad s = \beta^n.$$

第 (ii) 部分

設 $S_n = \alpha^n + \beta^n$。我們斷言 S_n 是整數。設 $d = \sqrt{a^2 - b}$，用二項式定理（binomial theorem）展開兩個冪，

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(d^k + (-d)^k) = 2 \sum_{k\ 偶數} \binom{n}{k} a^{n-k}(a^2 - b)^{k/2},$$

因為 k 為奇數的項互相抵消。餘下的每一項都是整數，所以 $S_n \in \mathbb{Z}$。（等價地，α, β 是 $t^2 - 2at + b = 0$ 的根，所以 $S_n = 2aS_{n-1} - bS_{n-2}$，其中 $S_0 = 2$ 及 $S_1 = 2a$。）

因此

$$\alpha^n = S_n - \beta^n, \qquad S_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \beta^n < 1.$$

? **想一想** 為甚麼這就迫使 $N = S_n$ 及 $r = \beta^n$？

把 $\alpha^n = N - r$ 表示成 N 為整數且 $0 \le r < 1$ 的形式，這種表示是唯一的：N 必須是不小於 α^n 的最小整數。若 $N' - r' = N - r$，且 $r, r' \in [0, 1)$，則 $N - N' = r - r'$ 是一個嚴格介乎 -1 與 1 之間的整數，所以它等於 0。我們的表達式 $S_n - \beta^n$ 正是這種形式，所以

$$N = S_n = \alpha^n + \beta^n, \qquad r = \beta^n = s.$$

第 (iii) 部分

利用 $r = \beta^n$、$N = \alpha^n + \beta^n$ 及 $(\alpha\beta)^n = b^n$，

$$\begin{aligned} r^2 - Nr + b^n &= \beta^{2n} - (\alpha^n + \beta^n)\beta^n + \alpha^n\beta^n \\ &= \beta^{2n} - \alpha^n\beta^n - \beta^{2n} + \alpha^n\beta^n \\ &= 0, \end{aligned}$$

得證。換句話說，r 是 $t^2 - Nt + b^n = 0$ 較小的根，而這方程的兩根是 α^n 和 β^n。

最後部分

取 $a = 8$ 及 $a^2 - b = 63$，所以 $b = 1$，且 $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$。條件 $b < 2a - 1 = 15$ 成立，所以以上所有結果都適用於 $\alpha = 8 + 3\sqrt{7}$：

$$\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n = N - r, \qquad N \in \mathbb{Z},$$

而 α^n 比整數 N 小 r。在第 (iii) 部分中取 $b=1$，得 $r(N-r)=1$，即

$$r=\frac{1}{N-r}=\frac{1}{\left(8+3\sqrt{7}\right)^n}=\left(8-3\sqrt{7}\right)^n.$$

特別地，$r\neq 0$，所以這個冪本身永遠不是整數，而且 $r\to 0$。現在 $3\sqrt{7}=\sqrt{63}$ 略小於 $\sqrt{64}=8$，所以

$$8+3\sqrt{7}\approx 16=2^4,\qquad \text{因此}\qquad r=\left(8+3\sqrt{7}\right)^{-n}\approx 16^{-n}=2^{-4n}.$$

所以當 n 很大時，$\left(8+3\sqrt{7}\right)^n$ 與某個整數相差大約 2^{-4n}，並且略小於該整數。

這個「大約」有多準確？由於 $8+3\sqrt{7}\approx 15.937$，我們有 $r=2^{-cn}$，其中 $c=\log_2(8+3\sqrt{7})\approx 3.994$。這個指數與 $4n$ 的差距在 0.2% 以內，估算正是在這個意義下成立。比值 $r/2^{-4n}=(16/(8+3\sqrt{7}))^n$ 緩慢上升，由 $n=1$ 時約 1.004 升至 $n=10$ 時的 1.04。

驗算

- $n=1$：$8+3\sqrt{7}\approx 15.93725$，即 $16-0.06275$，而 $8-3\sqrt{7}\approx 0.06275$，與預測相符。此外，$r^2-16r+1=0$ 較小的根是 $8-\sqrt{63}$。
- $n=2$：$(8+3\sqrt{7})^2=127+48\sqrt{7}\approx 253.99606$，所以 $N=254=S_2=2\cdot 8\cdot 16-2$，而 $r\approx 0.003937$，對比 $2^{-8}\approx 0.003906$。
- 以電腦對數以千計滿足 $b<2a-1$ 的隨機數對 (a,b) 及 $n\leq 7$ 進行驗算，確認了 $0<\beta^n<1$、$N-\alpha^n=\beta^n$ 及 $r^2-Nr+b^n=0$。對 $a=8$、$b=1$、$n\leq 10$ 進行的高精度驗算確認了 $N-\alpha^n=(8-3\sqrt{7})^n$；當 $n=10$ 時，此值為 9.46×10^{-13}，對比 $2^{-40}\approx 9.09\times 10^{-13}$。

常見錯誤

- 只證明了 $\beta<1$，卻忘記 $\beta>0$（這需要 $b>0$）。兩者都是 $M=0$ 所必需的。
- 斷言 $N=\alpha^n+\beta^n$，卻沒有說明為甚麼 $N-r$ 中的整數部分與小數部分是唯一的。
- 以為 $r/2^{-4n}\to 1$。事實並非如此：近似只是在指數上成立，因為 $8+3\sqrt{7}$ 接近 16，但不等於 16。

STEP 之外

數 $\alpha^n+\beta^n$ 是跡（trace）的一個例子：α 是一個代數整數（algebraic integer），而它的共軛數位於單位區間之內，所以它的冪以指數速度趨近整數。這類數稱為 Pisot 數（Pisot

numbers）；黃金比例（golden ratio）是另一個例子，這就是為甚麼 φ^n 接近盧卡斯數（Lucas number）L_n。這裏的情況亦與佩爾方程（Pell's equation）密切相關：$8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1$，所以 $(8,3)$ 是 $x^2 - 7y^2 = 1$ 的最小正整數解。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）對佩爾方程及連分數（continued fractions）有精彩的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。