詳細解答

STEP II 1987，第 2 題

純數學 • 三角恆等式

> **STEP II 1987，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q2

關鍵思路

這個式子只涉及 $\sin^2 A$、$\sin^2 B$ 和 $\sin^2 C$，而且它是 $\sin^2 C$ 的二次式（quadratic）。關於 $A \pm B \pm C$ 的條件表示 C 與 $A+B$ 或 $A-B$ 有關，因此自然會猜想這個二次式的兩個根（roots）就是 $\sin^2(A+B)$ 和 $\sin^2(A-B)$。驗證兩根之和與兩根之積便能證實這個猜想，結果隨之而出。

解答

設 $x = \sin^2 A$、$y = \sin^2 B$、$z = \sin^2 C$，並把左邊記作 E。於是

$$E = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy + 4xyz.$$

按 z 的冪次整理，

$$\begin{aligned} E &= z^2 - 2z(x + y - 2xy) + (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= z^2 - 2(x + y - 2xy)\, z + (x - y)^2. \end{aligned}$$

二次式的根

我們斷言

$$E = (z - \sin^2(A+B))(z - \sin^2(A-B)).$$

由於兩邊都是 z 的首一（monic）二次式，只需驗證 $\sin^2(A+B)$ 與 $\sin^2(A-B)$ 的和與積正確即可。

和。展開 $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ 再平方，相加時交叉項互相抵消：

$$\begin{aligned}\sin^2(A+B) + \sin^2(A-B) &= 2\sin^2 A\cos^2 B + 2\cos^2 A \sin^2 B \\ &= 2x(1-y) + 2(1-x)y \\ &= 2(x+y-2xy).\end{aligned}$$

積。利用平方差（difference of two squares），

$$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A\cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B = x(1-y) - (1-x)y = x - y,$$

所以 $\sin^2(A+B)\sin^2(A-B) = (x-y)^2$。

兩者都與 E 的係數吻合，斷言得證。

> **想一想** 為甚麼只需知道 $\sin^2 C$ 等於 $\sin^2(A+B)$ 或 $\sin^2(A-B)$ 就足夠？

因為這樣 z 就是兩個根之一，於是 E 的其中一個因式為零。餘下要證明的，就是角的條件恰好給出這一點。

運用條件

假設對某個整數 k 及某些符號 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}$，有 $A + \varepsilon_1 B + \varepsilon_2 C = k\pi$。那麼

$$C = \varepsilon_2(k\pi - (A + \varepsilon_1 B)).$$

函數 $\sin^2$ 是偶函數（even function），且週期（period）為 π，因此符號 ε_2 和 $k\pi$ 都不會改變它的值：

$$\sin^2 C = \sin^2(A + \varepsilon_1 B).$$

所以 $z = \sin^2(A+B)$（當 $\varepsilon_1 = 1$）或 $z = \sin^2(A-B)$（當 $\varepsilon_1 = -1$）。無論哪種情況，E 都有一個因式為零，因此

$$E = 0,$$

即為所求。■

更簡潔的形式（及逆命題）

每個因式都是兩個正弦平方之差，而 $\sin^2 P - \sin^2 Q = \sin(P+Q)\sin(P-Q)$（即上面的積公式取 $A = P$、$B = Q$）。所以

$$E = \sin(A+B+C)\,\sin(C-A-B)\,\sin(C+A-B)\,\sin(C-A+B).$$

這裏的四個角在不計正負號下，正好是 $A+B+C$、$A+B-C$、$A-B+C$ 和 $A-B-C$。這令結果一目了然：$E = 0$ 當且僅當四個角 $A \pm B \pm C$ 之一是 π 的倍數。這也給出了逆命題（converse）。

驗算

- 取 $A=\frac{\pi}{6}$、$B=\frac{\pi}{3}$、$C=\frac{\pi}{2}$，於是 $A+B-C=0$。那麼 $x=\frac{1}{4}$、$y=\frac{3}{4}$、$z=1$，且 $E=\frac{1}{16}+\frac{9}{16}+1-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}+\frac{3}{4}=0$。
- 取 $A=0.3$、$B=0.7$、$C=1.1$（沒有特殊關係），E 和四個正弦之積的值都是 0.05538，可見在條件不成立時，這個式子確實不為零。
- 對 10^5 組隨機三元組的測試證實了這個因式分解（factorisation），並證實每當強制 $A\pm B\pm C$ 之一為 π 的倍數時，$E=0$ 的誤差在 10^{-14} 以內。

常見錯誤

- 只處理 $A+B+C=\pi$（三角形）的情況。題目容許四種符號組合中的任何一種，以及 π 的任何倍數；$\sin^2$ 的偶性和以 π 為週期的性質可一併處理所有情況。
- 用公式解二次方程，結果被 $\sqrt{xy(1-x)(1-y)}$ 纏住。驗證所猜測的根的和與積，就能完全避開開方和正負號的煩惱。

STEP 之外

式子 $x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy$ 在數學中隨處可見：把 x,y,z 換成 a^2,b^2,c^2，它就是邊長為 a、b、c 的三角形面積平方的 -16 倍（海倫公式（Heron's formula）），它也是一個類似判別式（discriminant）的量，決定三條長度能否構成三角形。把對稱多項式（symmetric polynomial）看成其中一個變量的二次式，並猜出它的根，是一種在代數及不變量理論（invariant theory）中反覆出現的技巧。想做更多同類題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。