詳細解答

STEP II 1987，第 16 題

概率與統計 • 貝葉斯定理

STEP II 1987，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/87-s2-q16

關鍵思路

這是貝葉斯定理（Bayes' theorem）最樸素的形式。兩個「是」的報告可以有兩種來源：說法屬實而兩位朋友都說真話，或者說法不實而兩人都說謊。我們按每條途徑的先驗概率（prior probability）和出現這對報告的概率為它加權，然後問總數中有多大比例來自「屬實」這條途徑。第二部分的做法相同。唯一的新要點是，朋友的回答只涉及 A，所以我們必須按 A 是否在雪櫃裏，把三種可能情況分類。

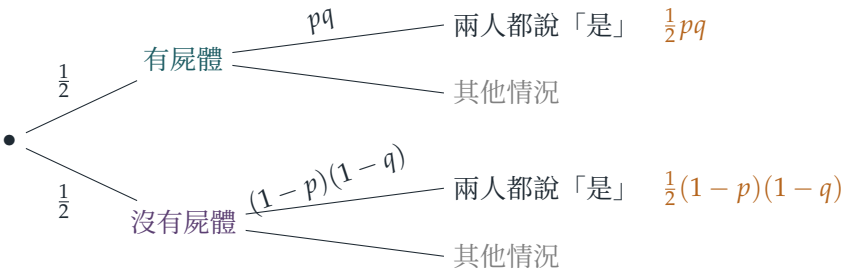
解答

第一個估計

設 F 為雪櫃裏有屍體這一事件，Y 為 P 和 Q 都說有屍體這一事件。今天早上 $\Pr(F) = \Pr(F') = \frac{1}{2}$。

我們把每位朋友看作回答一條是非題：說真話就是給出正確答案，說謊就是給出錯誤答案。朋友是否誠實與雪櫃裏有甚麼無關，而且 P 和 Q 的行為互相獨立（independent）。所以：

- 若有屍體，兩人都說「是」當且僅當兩人都說真話，所以 $\Pr(Y \mid F) = pq$；
- 若沒有屍體，兩人都說「是」當且僅當兩人都說謊，所以 $\Pr(Y \mid F') = (1-p)(1-q)$。



根據條件概率（conditional probability）的定義（貝葉斯定理），

$$\begin{aligned}\Pr(F \mid Y) &= \frac{\Pr(F)\Pr(Y \mid F)}{\Pr(F)\Pr(Y \mid F) + \Pr(F')\Pr(Y \mid F')} = \frac{\frac{1}{2}pq}{\frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}(1-p)(1-q)} \\ &= \frac{pq}{pq + 1 - p - q + pq} = \frac{pq}{1 - p - q + 2pq},\end{aligned}$$

這就是所求的估計。由於先驗概率是平分的，因子 $\frac{1}{2}$ 互相抵消。

> **想一想** 為甚麼答案不就是 pq，即兩人都說真話的概率？

因為我們已經知道一些資訊：他們的說法一致。恰好一人說謊的結果現在已不可能出現，因為那會產生一個「是」和一個「否」。我們必須在剩下的情況上重新按比例調整。在兩條剩下的途徑中，「兩人都說真話」的權重是 pq，「兩人都說謊」的權重是 $(1-p)(1-q)$。除以兩者之和，正是這個重新調整。（先驗概率 $\frac{1}{2}$ 也有作用。若先驗概率不平分，它們就不會抵消。）

第二個估計

現在肯定有屍體。三個等可能的情況，各自的先驗概率為 $\frac{1}{3}$，分別是

$$\text{只有 } A, \qquad \text{只有 } B, \qquad A \text{ 和 } B \text{ 都在.}$$

設 Y_A 為兩位朋友都說 A 在雪櫃裏這一事件。按照與之前相同的模型，他們的回答只取決於 A 是否在雪櫃裏：

- 在「只有 A」和「兩者都在」的情況下，A 在雪櫃裏，所以每種情況都有 $\Pr(Y_A) = pq$；
- 在「只有 B」的情況下，A 不在，所以 $\Pr(Y_A) = (1-p)(1-q)$。

因此

$$\begin{aligned}\Pr(\text{兩者都在} \mid Y_A) &= \frac{\frac{1}{3}pq}{\frac{1}{3}pq + \frac{1}{3}(1-p)(1-q) + \frac{1}{3}pq} \\ &= \frac{pq}{2pq + 1 - p - q + pq} = \frac{pq}{1 - p - q + 3pq}.\end{aligned}$$

留意這些報告並沒有直接告訴我們任何關於 B 的資訊。它們唯一的作用，是改變 A 在場的概率。根據第一部分（以先驗概率 $\frac{2}{3}$ 代替 $\frac{1}{2}$），這個概率變成 $2pq/(1-p-q+3pq)$。已知 A 在場時，「只有 A」和「兩者都在」仍然等可能，所以把它減半。這樣得出相同的答案。

驗算

- 若 $p=q=\frac{1}{2}$，朋友的話毫無用處，答案回到先驗概率：$\frac{1}{4}/\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{4}/\frac{3}{4}=\frac{1}{3}$。
- 若 $p=q=1$，朋友絕不出錯，答案變成 1（有屍體）和 $\frac{1}{2}$（A 在，所以 B 是否也在是一半一半）。
- 當 $p=q=\frac{3}{4}$ 時，答案是 $\frac{9}{10}$ 和 $\frac{9}{19}$。對 200 組隨機的 (p,q)，逐一列舉所有狀態與說真話情況組合的精確計算均與答案吻合。以 $p=0.7$、$q=0.6$ 進行 4×10^5 次試驗的模擬，第二部分得出 0.4375，與 $\frac{0.42}{0.96}=0.4375$ 相符。

常見錯誤

- 答 pq，忘記了「兩人都說謊」同樣會產生兩個「是」。
- 在第二部分，分子只放「兩者都在」的情況，卻在分母中漏掉「只有 A」的情況。這兩種情況都與 A 在場相符。

STEP 之外

這就是貝葉斯更新（Bayesian updating）。先驗信念乘以證據的似然（likelihood），然後歸一化。一個簡潔的寫法是勝算（odds）形式：後驗勝算等於先驗勝算乘以似然比（likelihood ratio）$\frac{pq}{(1-p)(1-q)}$。這樣寫就清楚顯示，互相獨立的證人只需把各自的比率相乘。同樣的計算是醫學檢測、垃圾郵件過濾器以及法庭上綜合證據的基礎。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）有一章精彩地講解條件概率，收錄了許多正是這類風格的趣題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。