詳細解答

STEP II 1987，第 15 題

概率與統計 • 幾何概率

> **STEP II 1987，第 15 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q15

關鍵思路

先不要想位置，改為考慮時間。每輛車都會在一段時間區間內佔用交叉口，而碰撞發生的充要條件，正是這兩段時間區間有重疊。把這個重疊條件寫成兩條不等式（inequality），(u_1, u_2) 平面上的碰撞區域就變成夾在兩條過原點直線之間的楔形區域。由於 u_1, u_2 在 $(0, V)$ 上均勻分佈（uniform），點 (u_1, u_2) 便在一個正方形上均勻分佈，所以所求概率（probability）就是正方形中落在楔形區域內的面積比例，而題目的三種情況，對應的正是兩條直線從正方形哪一邊穿出。

解答

碰撞條件

我們把火車和貨車看作以恆定速率 $u_1, u_2 > 0$ 沿兩條相交於一點的直路行駛（交叉口的寬度忽略不計，或已計入車長之內）。碰撞發生當且僅當在同一時刻，兩輛車各有某部分正處於交叉口。

火車車頭在時刻 d_1/u_1 到達交叉口，車尾在時刻 $(d_1 + l_1)/u_1$ 駛離，因此火車佔用交叉口的時間為

$$\frac{d_1}{u_1} < t < \frac{d_1 + l_1}{u_1}.$$

同樣，貨車佔用交叉口的時間為 $d_2/u_2 < t < (d_2 + l_2)/u_2$。兩個開區間（open interval）$(a_1, b_1)$ 與 (a_2, b_2) 有重疊，當且僅當每一個都在另一個結束之前開始：$a_1 < b_2$ 且 $a_2 < b_1$。所以碰撞發生當且僅當

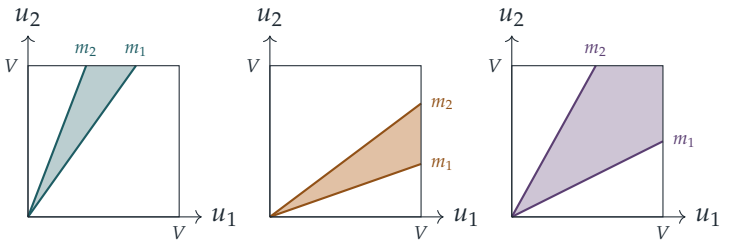
$$\frac{d_1}{u_1} < \frac{d_2 + l_2}{u_2} \quad \text{且} \quad \frac{d_2}{u_2} < \frac{d_1 + l_1}{u_1}.$$

兩邊乘以正數 u_1u_2 再整理，即得

$$\boxed{\frac{d_2}{d_1+l_1}u_1 \;<\; u_2 \;<\; \frac{d_2+l_2}{d_1}u_1.}$$

（若某條不等式取等號，兩車只是車頭碰車尾地剛好接觸；這種情況的概率為零，所以算不算進去都沒有影響。）

記 $m_1 = \dfrac{d_2}{d_1+l_1}$ 及 $m_2 = \dfrac{d_2+l_2}{d_1}$。由於 $d_2 < d_2+l_2$ 且 $d_1+l_1 > d_1$，有 $m_1 < m_2$，因此碰撞區域就是第一象限中夾在直線 $y = m_1x$ 與 $y = m_2x$ 之間的楔形區域。下圖以陰影顯示它在正方形 $0 < x, y < V$ 內的部分，這正是下一步所需要的。



(A) $d_1+l_1 \le d_2$　(B) $d_2+l_2 \le d_1$　(C) 其他情況

火車車尾比貨車車頭更接近交叉口時的概率

由於 u_1 與 u_2 互相獨立（independent），且各自在 $(0, V)$ 上均勻分佈，數對 (u_1, u_2) 在正方形 $(0, V)^2$ 上的聯合密度（joint density）為常數 $1/V^2$。所以碰撞的概率為

$$\frac{\text{楔形區域在正方形內的面積}}{V^2}.$$

？ 想一想 這兩條直線分別從正方形的哪一邊穿出？

若 $m \ge 1$，直線 $y = mx$ 從正方形的上邊穿出（於 $(V/m, V)$）；若 $m \le 1$，則從右邊穿出（於 (V, mV)）。在這情況下 $d_1+l_1 < d_2$，所以 $m_1 = d_2/(d_1+l_1) > 1$，從而 $m_2 > m_1 > 1$：兩條直線都從上邊穿出，如圖 (A) 所示。

此時楔形區域在正方形內的部分，是頂點為 $(0,0)$、$(V/m_2, V)$ 和 $(V/m_1, V)$ 的三角形。它在上邊的底長為 $V/m_1 - V/m_2$，高為 V，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{碰撞}) &= \frac{1}{V^2}\cdot\frac{1}{2}V\left(\frac{V}{m_1}-\frac{V}{m_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d_1+l_1}{d_2}-\frac{d_1}{d_2+l_2}\right)\\ &= \frac{(d_1+l_1)(d_2+l_2)-d_1d_2}{2d_2(d_2+l_2)} = \frac{l_1l_2+l_2d_1+l_1d_2}{2d_2(l_2+d_2)},\end{aligned}$$

因為 d_1d_2 項互相抵消。這就是所求的結果。

其餘兩種情況

貨車車尾比火車車頭更接近交叉口，$d_2 + l_2 < d_1$。 此時 $m_2 = (d_2 + l_2)/d_1 < 1$，所以 $m_1 < m_2 < 1$，兩條直線都從右邊穿出，如圖 (B) 所示。楔形區域是頂點為 $(0,0)$、(V, m_1V)、(V, m_2V) 的三角形：在邊 $x = V$ 上的底長為 $(m_2 - m_1)V$，高為 V。所以

$$\mathrm{P}(\text{碰撞}) = \frac{1}{2}(m_2 - m_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{d_2 + l_2}{d_1} - \frac{d_2}{d_1 + l_1}\right) = \frac{l_1 l_2 + l_1 d_2 + l_2 d_1}{2d_1(l_1 + d_1)}.$$

這正是把第一個答案中火車與貨車的角色對調（$l_1 \leftrightarrow l_2$，$d_1 \leftrightarrow d_2$）所得的結果；這是理所當然的，因為對調兩輛車就相當於把圖形沿 $y = x$ 作反射。

兩輛車都不完全在對方前面，$d_2 \le d_1 + l_1$ **且** $d_1 \le d_2 + l_2$。 此時 $m_1 \le 1 \le m_2$，所以直線 $y = m_1 x$ 從右邊穿出，而 $y = m_2 x$ 從上邊穿出，如圖 (C) 所示。最簡單的做法是從正方形中減去兩個不會碰撞的三角形：在 $y = m_1 x$ 下方的那個面積為 $\frac{1}{2}V \cdot m_1 V$，而在 $y = m_2 x$ 左方（即它與 u_2 軸之間）的那個面積為 $\frac{1}{2}V \cdot V/m_2$。因此

$$\mathrm{P}(\text{碰撞}) = 1 - \frac{m_1}{2} - \frac{1}{2m_2} = 1 - \frac{d_2}{2(d_1 + l_1)} - \frac{d_1}{2(d_2 + l_2)}.$$

在各情況的交界處，答案互相吻合：當 $d_2 = d_1 + l_1$（即 $m_1 = 1$）時，第一條和第三條公式都給出 $\frac{1}{2} - \frac{d_1}{2(d_2 + l_2)}$；在 $d_1 = d_2 + l_2$ 處亦然。留意所有概率都與 V 無關：把兩個速率按同一比例放大或縮小，並不會改變兩車是否相撞。

驗算

- 取 $l_1 = 1$、$l_2 = 2$、$d_1 = 1$、$d_2 = 5$（情況 A），公式給出 $\frac{9}{70} \approx 0.1286$；以 4×10^5 組隨機速率作模擬，得 0.1283。在情況 B 和 C 中的模擬（例如 $l_1 = l_2 = 1$、$d_1 = 1$、$d_2 = 1.5$，得 0.425）亦吻合至 0.002 以內。
- 在情況 A 中令 $l_1, l_2 \to 0$，概率為 0：兩個點只有在 $u_2/u_1 = d_2/d_1$ 恰好成立時才會在交叉口相遇。
- 在情況 C 中取 $d_1 = d_2$ 而兩車都很長，則 $m_1 \to 0$ 且 $m_2 \to \infty$，所以概率趨於 1，這是合理的。

常見錯誤

- 只寫一條不等式，例如「火車在貨車駛離交叉口之前到達」；兩個區間有重疊需要兩個條件同時成立。
- 在情況 C 中套用三角形面積公式，但那裏的區域其實是四邊形；應先確定每條直線從正方形哪一邊穿出。

STEP 之外

這裏的方法是把關於獨立均勻隨機變量的概率轉化為面積，稱為幾何概率（geometric probability）；它是把 $\mathrm{P}((X,Y)\in A)$ 計算為聯合密度的二重積分（double integral）的最簡單例子。同一想法也是一些經典問題的基礎，例如布豐（Buffon）投針問題，以及兩人在隨機時刻到達的「相遇問題」。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）正是以這種方式發展聯合密度及其應用。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。